

Мадьяров В.Р.

**ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ
ПО ФИЗИКЕ**

Часть 3. Электричество и магнетизм

Учебное пособие для студентов
дневной формы обучения специальностей

- 1-36 01 08 «Конструирование и производство изделий
из композиционных материалов»,
- 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств
и предприятий строительных материалов»,
- 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов
и производств»

ЛЕКЦИЯ 1

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО СВОЙСТВА

1-1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда

1-2. Закон Кулона

1-3. Напряженность электростатического поля. Графическое изображение электрического поля

1-4. Принцип суперпозиции электрических полей

1-1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда

В настоящее время известно, что в основе всего разнообразия явлений природы лежат четыре фундаментальных взаимодействия между элементарными частицами – сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, электромагнитное – от электрических зарядов.

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик. Рассмотрим фундаментальные свойства электрического заряда.

1) Электрический заряд существует в двух видах; как положительный, так и отрицательный; и обладает дискретностью (квантовый характер заряда), Минимально наблюдаемый заряд – заряд электрона, остальные все заряды кратны ему. Впервые это было получено в опытах Милликена.

Рассмотрим опыты Милликена. В воздушный конденсатор (рис. 1-1) помещались капельки масла с помощью распылителя. Капли могли быть заряжены в процессе распыления или при излучении ультрафиолетовой лампы за счет фотоэффекта. Без включения электрического поля имеем равенство сил – с одной стороны силы тяжести и силы Архимеда, а с другой стороны силы сопротивления воздуха при установившейся скорости падения капли масла (силы Стокса):

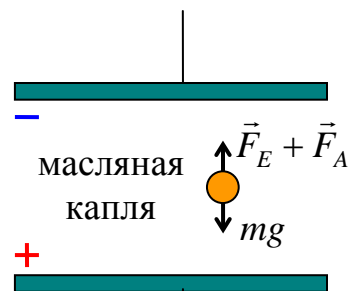


Рис.1-1

$$mg - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g = 6 \pi \eta r v_g. \quad (1-1)$$

Здесь масса капли $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\hat{e}}$, где r – ее радиус, ρ_{κ} и $\rho_{\text{в}}$ – плотности масляной капли и воздуха; η – коэффициент вязкости воздуха, v_g – установившаяся скорость.

Подставляя массу капли в (1-1), находим квадрат радиуса капли:

$$r^2 = \frac{9\eta v_g}{2(\rho_{\hat{e}} - \rho_{\hat{a}})g}.$$

Отсюда, измеряя скорость падения капли, узнаем ее радиус.

Далее, включаем напряжение на конденсаторе, при этом так подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю $v_g = 0$. Тогда получаем:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\hat{e}} - \rho_{\hat{a}})g = qE, \quad (1-2)$$

где q – заряд капли, E – напряженность электрического поля.

Из уравнения (1-2) можно найти заряд капли. При освещении конденсатора ультрафиолетовым светом заряд капли изменяется (фотоэффект). Тогда снова подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю, и определяем ее новый заряд. Оказалось, что заряд капли всегда кратен одной и той же величине – заряду электрона e^- : $\Delta q = ne^-$, где $e^- = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Существуют элементарные частицы – кварки, их заряды – дробные от заряда электрона $\left(\pm \frac{1}{3}e, \pm \frac{2}{3}e\right)$, но кварки не появляются в свободном состоянии.

2) В любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется, это утверждение выражает закон сохранения электрического заряда;

3) Электрический заряд является релятивистски инвариантным: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

1-2. Закон Кулона

Кулон в 1785 г. провел опыты с крутильными весами для точечных зарядов (их размеры значительно меньше расстояния между ними $r \ll r_{12}$). Основным результатом этих опытов явилось определение

количественной зависимости силы взаимодействия между этими зарядами от величины этих зарядов и расстояния r_{12} между ними.

Формулировка закона Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

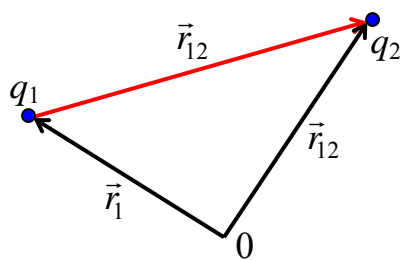


Рис. 1-2

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (1-3)$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.$$

Коэффициент $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная. Кулон – большая единица заряда. Так, сила взаимодействия 2-х точечных зарядов по 1 Кл на расстоянии в 1 км = 10^3 м равна:

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^6} = 9 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

1-3. Напряженность электрического поля. Графическое изображение электрического поля

Согласно современным представлениям взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства – создает электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный», заряд испытывает действие силы.

Опыт показывает, что сила \vec{F} , действующая на неподвижный точечный пробный заряд, всегда может быть представлена в виде

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1-4)$$

где вектор \vec{E} называют напряженностью электрического поля в данной точке. Вектор \vec{E} можно определить как силу, действующую на

единичный положительный неподвижный заряд. Здесь предполагается, что пробный заряд q должен быть достаточно малым, чтобы его внесение не вызвало заметного искажения интересующего нас поля (вследствие перераспределения создающих поле зарядов).

Из опыта (закон Кулона) непосредственно следует, что напряженность поля \vec{E} неподвижного точечного заряда q на расстоянии r от него можно представить как

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{i}, \quad (1-5)$$

где \vec{i} – орт радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из центра поля, в котором расположен заряд q , до интересующей нас точки.

Формула (1-5) записана в системе СИ. Заряд q измеряется в кулонах (Кл), напряженность поля – в вольтах на метр (В/м). В зависимости от знака заряда q вектор \vec{E} направлен так же, как и \vec{r} , или противоположно ему. По существу формула (1-5) выражает не что иное, как закон Кулона, но в «полевой» форме. Весьма важно, что напряженность \vec{E} поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния \vec{r} . К настоящему времени полученные экспериментальные данные показывают, что этот закон справедлив для расстояний от 10^{-15} м до нескольких километров.

Следует отметить, что в поле, создаваемом неподвижным точечным зарядом, сила, действующая на пробный заряд, не зависит от того, покоится пробный заряд или движется. Это относится и к системе неподвижных зарядов.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего пространства, создает в нем электрическое поле, которое проявляется в воздействии на пробный заряд q_0 . Силовая характеристика электрического поля – *напряженность* электрического поля, которая определяется как сила, действующая на единичный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (1-6)$$

Напряженность поля точечного заряда q получается из закона Кулона:

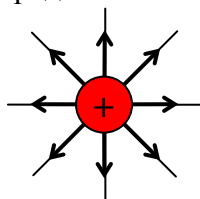
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{12}^2}. \quad (1-7)$$

Однородное поле – поле, напряженность которого постоянна по величине и по направлению в любой точке пространства:

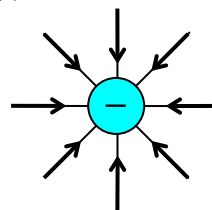
$$\vec{E} = \text{const.}$$

Поле вектора \vec{E} графически удобно представлять в виде линий тока вектора или силовых линий. Силовые линии – кривые в пространстве, касательные к которым совпадают с направлением напряженности поля в данной точке. В присутствии зарядов они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Простейшие примеры силовых линий напряженности поля представлены ниже.

а) Силовые линии поля точечного положительного заряда



б) Силовые линии поля точечного отрицательного заряда



в) Силовые линии однородного электрического поля



г) Силовые линии поля диполя

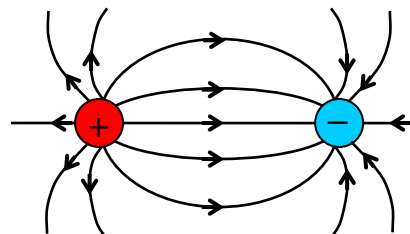


Рис. 1-3

1-4. Принцип суперпозиции электрических полей

Из обобщения опытных фактов следует *принцип суперпозиции* электрических полей. Если имеется система зарядов, то сила на пробный заряд q_0 со стороны i -го заряда не изменится, если присутствуют другие заряды:

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^3} \vec{r}_{0i}.$$

Полная сила на пробный заряд q_0 записывается как сумма сил, действующих со стороны каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_i \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{r_{0i}^3} = q_0 \sum_i \vec{E}_i = q_0 \vec{E}. \quad (1-8)$$

Напряженность электрического поля от всех зарядов определяется как векторная сумма напряженностей, создаваемых отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (1-9)$$

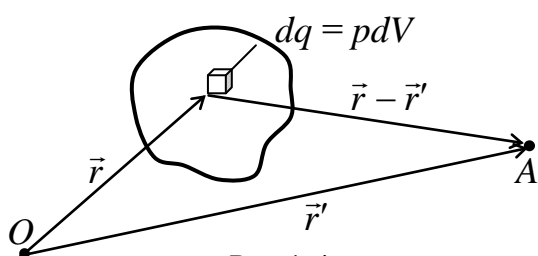


Рис.1-4

В случае непрерывного распределения заряда (рис. 1-4) надо разбить объем на маленькие кусочки (элементарные объемы), которые можно считать точечными зарядами $dq = \rho dV$, где ρ – плотность заряда, и тогда электрическое поле в точке А находится путем интегрирования по объему

всего тела:

$$\vec{E} = \int \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV.$$

При вычислении полной напряженности надо рассматривать проекции на оси координат и проводить интегрирование (суммирование) для каждой проекции отдельно.

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin \alpha, \quad E_y = \int dE_y = \int dE \cos \alpha. \quad (1-10)$$

Вектор напряженности поля получается путем сложения проекций как векторов со своими ортами.

Пример: Расчет электростатического поля, создаваемого зарядом, равномерно распределенным по стержню.

Тонкий стержень длиной $l = 30$ см. (рис. 1-5) равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В точке А на расстоянии

$r_0 = 20$ см от стержня находится точечный заряд $q_1 = 10$ нКл. Заряд равноудален от концов стержня. Определить силу взаимодействия заряда q_1 с заряженным стержнем в вакууме.

Решение. Силу взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем будем искать, используя формулу (1-5):

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}, \quad (1-11)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля заряженного стержня в точке A .

Напряженность \vec{E} поля заряженного стержня в точке A найдем по формуле (1-8), т. е. по принципу суперпозиции. Выберем систему координат с центром O в середине стержня (рис. 1-5) и на расстоянии x от точки O выделим на стержне элементарный участок длиной dx . Его заряд $dq = \tau dx$ можно рассматривать как точечный, поэтому напряженность поля находим по формуле (1-7):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dx}{r^2}, \quad (1-12)$$

где r – расстояние от выделенного элемента dx до точки A .

Проекции E_x и E_y результирующего поля находим по формулам (1-10):

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin \alpha \quad \text{и} \quad E_y = \int dE_y = \int dE \cos \alpha. \quad (1-13)$$

Из рис. 1-5 видно, что

$$r = \sqrt{r_0^2 + x^2}, \quad \sin \alpha = x/r, \quad \cos \alpha = r_0/r. \quad (1-14)$$

Подставим выражения (1-12) и (1-14) в формулы (1-13). Используя подстановку $t = x^2$ ($dt = 2x dx$) и вычисляя интеграл по x в пределах от $-l/2$ до $+l/2$, находим проекции E_x и E_y :

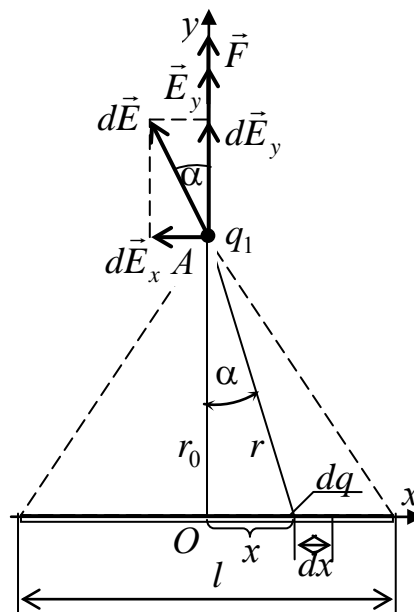


Рис. 1-5

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\tau x dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(r_0^2 + t)^{3/2}} \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{1/2}} \Bigg|_{-l/2}^{+l/2} = 0. \\
E_y &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\tau r_0 dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\tau x}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0(r_0^2 + x^2)^{1/2}} \Bigg|_{-l/2}^{+l/2} = \\
&= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0(r_0^2 + (l/2)^2)^{1/2}} [l/2 - (-l/2)] = \frac{\tau l}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_0(4r_0^2 + l^2)^{1/2}}. \quad (1-15)
\end{aligned}$$

Поскольку проекция $E_x = 0$, то модуль напряженности \vec{E} равен E_y ($E_y > 0$), а сила отталкивания

$$\vec{F} = q_1 \cdot \vec{E}_y \Rightarrow F = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \cdot \frac{l}{(4r_0^2 + l^2)^{1/2}} \approx 540 \text{ мкН}. \quad (1-16)$$

ЛЕКЦИЯ 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО СВОЙСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2-1. Работа в электростатическом поле. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

2-2. Потенциальная энергия электростатического поля. Потенциал. Принцип суперпозиции потенциалов.

2-3. Взаимосвязь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности.

2-1. Работа в электростатическом поле. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Из механики известно выражение для элементарной работы, совершаемой силами электростатического поля с напряженностью \vec{E} , по перемещению точечного заряда q_0 :

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l}, \quad (2-1)$$

где $d\vec{l}$ – вектор перемещения.

Из механики известно также, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т. е. работа сил этого поля не зависит от пути, а зависит только от положения начальной и конечной точки. Именно таким свойством обладает электростатическое поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда q_0 , переносимого из точки 1 поля \vec{E} в точку 2, взять единственный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении $d\vec{l}$ равна $\vec{E} d\vec{l}$, а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется суммированием по элементарным перемещениям, которое можно заменить интегралом:

$$A = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (2-2)$$

Этот интеграл берется по некоторой линии (пути), поэтому его называют линейным. Чтобы вычислить этот интеграл, надо найти проекции вектора \vec{E} в каждой точке пути на направление перемещения $d\vec{l}$, а затем их сложить. Как следует из закона Кулона, электро-

статическое поле является центральным и потенциальным. Работа сил такого поля не зависит от пути между двумя точками, а по произвольному замкнутому пути эта работа равна нулю. Поэтому, интеграл (2-2) по замкнутому контуру равен нулю;

$$\oint_1^2 \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (2-3)$$

Интеграл в (2-3) называют *циркуляцией вектора \vec{E}* . Само равенство (2-3) называют *теоремой о циркуляции вектора \vec{E}* . Из этой теоремы следует, что линии электростатического поля E не могут быть замкнутыми. В самом деле, если это не так и какая-то линия вектора \vec{E} замкнута, то, взяв циркуляцию вектора \vec{E} вдоль этой линии, мы сразу же приходим к противоречию с теоремой о циркуляции (2-3). Действительно, в электростатическом поле замкнутых линий вектора \vec{E} не существует: линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

2-2. Потенциальная энергия электростатического поля. Потенциал. Принцип суперпозиции потенциалов.

Работа сил электростатического поля по перемещению заряда сопровождается изменением потенциальной энергии этого заряда. Если работа совершается внешними силами, то энергия заряда увеличивается, и наоборот, если работа совершается кулоновскими силами электростатического поля, то энергия заряда уменьшается на величину этой работы. Например, при сближении одноименных зарядов приходится совершать работу против сил отталкивания, а при разведении разноименных зарядов совершается работа против сил притяжения. В обоих случаях потенциальная энергия заряда увеличивается за счет работы внешних сил. После прекращения действия этих сил заряды начинают перемещаться под действием сил электростатического поля, т. е. силы поля совершают работу. В таком случае можно сказать, что поле является источником энергии. Запишем известное соотношение между элементарной работой δA и приращением потенциальной энергии dU :

$$\delta A = -dU. \quad (2-3)$$

Положим в (2-3):

$$dU = q_0 d\varphi, \quad (2-4)$$

где φ – некоторая скалярная величина, которая получила название потенциала.

Если потенциал поля в точке 1 равен φ_1 , а в точке 2 – φ_2 , то интегрируя (2-4), получим для приращения потенциальной энергии:

$$\Delta U = q_0(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2-5)$$

Можно сказать, что потенциал – это величина, численно равная *потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля*.

Обозначим A_{12} работу по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 поля в точку 2. Проинтегрировав (2-3), получим $A_{12} = -\Delta U$. Используя соотношение (2-5), получим для единичного заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (2-6)$$

Величина $\varphi_1 - \varphi_2$ получила название *разности потенциалов, которая численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 поля в точку 2*. Таким образом, потенциал – энергетическая характеристика электрического поля. Потенциалу какой-либо произвольной точки поля можно условно приписать любое постоянное значение. Тогда потенциалы всех других точек поля однозначно определяются согласно (2-6). Если изменить потенциал поля в данной точке на некоторую величину, то на такую же величину изменятся и потенциалы во всех других точках поля. Таким образом, потенциал φ определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Значение этой постоянной не играет роли, так как все электрические явления зависят только от напряженности электрического поля, которая в свою очередь определяется не самим потенциалом в данной точке поля, а разностью потенциалов в соседних точках поля. Единицей потенциала является вольт (В).

2-3. Взаимосвязь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности

Электрическое поле полностью описывается векторной функцией $\vec{E}(r)$. Зная ее, мы можем найти силу, действующую на заряд в любой точке поля, вычислить работу сил поля при каком угодно перемещении заряда и др. А что дает введение потенциала? Оказывается,

зная потенциал $\varphi(r)$ данного электрического поля, можно достаточно просто восстановить и само поле $\vec{E}(r)$.

Приравняв правые части формул (2-1) и (2-3) и используя (2-4), получим выражение, которое определяет связь между напряженностью и потенциалом:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l}. \quad (2-7)$$

Приращение $d\varphi$ в формуле (2-7) является полным дифференциалом от координат (x, y, z) , т. е.

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Скалярное произведение в правой части (2-7) равно сумме произведений проекций вектора перемещения и напряженности поля:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz).$$

Подставив это выражение в (2-7) и приравняв коэффициенты при dx , dy и dz , получим:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (2-8)$$

Если подставить выражения (2-8) для проекций в формулу для вектора \vec{E} , то получим соотношение:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (2-9)$$

где уже известная из раздела механики величина:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

называется градиентом потенциала.

Согласно принципу суперпозиции для напряженности поля можно записать, используя формулу (2-9):

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \text{grad}\varphi_i = \text{grad}\sum_i \varphi_i = \text{grad}\varphi. \quad (2-10)$$

В формуле (2-10) $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$, т. е. принцип суперпозиции оказывается справедливым и для потенциала. Таким образом, потенциал системы неподвижных точечных зарядов равен алгебраической

сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (2-11)$$

Свойства потенциала электростатического поля:

1. Это скалярная величина.
2. Потенциал величина непрерывная, он не изменяется на границе раздела двух заряженных сред.
3. На бесконечности потенциал системы неподвижных стационарных зарядов полагается равным нулю.
4. Для потенциала электростатического поля справедлив принцип суперпозиции.

Эти свойства потенциала используются для расчета с помощью формулы (2-9) напряженности электрических полей, а, следовательно, и кулоновских сил, создаваемых распределенными (неточечными) зарядами.

Введем понятие эквипотенциальной поверхности – поверхности, во всех точках которой потенциал φ имеет одно и то же значение. Вектор напряженности \vec{E} направлен в каждой точке по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала φ . В самом деле, так как потенциал вдоль эквипотенциальной поверхности не меняется, то из формулы (2-7) следует, что проекция вектора \vec{E} на любое направление перемещения, касательное к эквипотенциальной поверхности в данной точке, равна нулю. А это значит, что вектор \vec{E} нормален к данной поверхности. Далее, возьмем перемещение $d\vec{l}$ по нормали к поверхности в сторону уменьшения φ , тогда $d\varphi < 0$ и проекция на направление перемещения положительна, т. е. вектор \vec{E} направлен в сторону уменьшения φ , или в сторону, противоположную вектору $\text{grad } \varphi$. Эквипотенциальные поверхности наиболее целесообразно проводить так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была бы одинаковой. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно наглядно судить о значении напряженности поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще («круче потенциальный рельеф»), там напряженность поля больше. Так как вектор \vec{E} всюду нормален к эквипотенциальной поверхности, линии вектора \vec{E} перпендикулярны к этим поверхностям

Пример 1. Потенциал поля точечного заряда.

Линии вектора точечного заряда направлены по лучам, исходящим из заряда. Поэтому, эквипотенциальные поверхности перпендикулярны в каждой точке этим линиям, т.е. представляют собой сферы. Потенциал в данной точке зависит только от одной переменной - расстояния от этой точки до заряда. Если обозначить это расстояние через r , то потенциал поля точечного заряда получается путем интегрирования (2-7) или одного из соотношений (2-8) с использованием соотношения (1-7) для напряженности \vec{E} :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const}.$$

Обычно константу выбирают так, чтобы на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) потенциал равнялся нулю, т. е.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы или конфигурации неподвижных зарядов. Тогда потенциал системы зарядов имеет вид:

$$\varphi = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}.$$

Для непрерывного распределения заряда имеем:

а) если имеется линейный источник с плотностью заряда $\tau = \tau(\vec{r})$, то потенциал равен

$$\varphi = k \int_L \frac{\tau dl}{r}, \quad (2-12, a)$$

б) если имеется заряженная поверхность с плотностью заряда $\sigma = \sigma(\vec{r})$, то потенциал равен

$$\varphi = k \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (2-12, б)$$

в) если имеется объемная плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r})$, то потенциал равен

$$\varphi = k \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (2-12, B)$$

Пример 2. Расчет напряженности поля с помощью принципа суперпозиции для потенциала.

Решим задачу примера лекции 1, но используя принцип суперпозиции для потенциала. Потенциал, создаваемый в точке А элементарным зарядом $dq = \tau dx$ найдем, используя формулу для точечного заряда:

$$(2-13)$$

Потенциал, создаваемый заряженным стержнем найдем согласно формуле (2-12а), интегрируя (2-13):

$$\varphi = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 (r_0^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + r_0^2} \right) \Big|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} + l}{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} - l}.$$

Потенциал точек, лежащих на оси, проходящей через середину стержня, как видно из этого равенства, зависит только от одной координаты r_0 . Напряженность поля и силу, действующую на заряд, найдем, используя одну из формул (2-8), дифференцируя полученное выражение для φ по координате r_0 :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{d\varphi}{dr_0} = -\frac{d}{dr_0} \left(\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} + l}{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} - l} \right) = \\ &= -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} - l}{\sqrt{l^2 + 4r_0^2} + l} \frac{1}{\left(\sqrt{l^2 + 4r_0^2} - l \right)^2} \left(\frac{2r_0 \sqrt{l^2 + 4r_0^2} - l}{2\sqrt{l^2 + 4r_0^2}} - \frac{2r_0 \sqrt{l^2 + 4r_0^2} + l}{2\sqrt{l^2 + 4r_0^2}} \right) = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r_0 \sqrt{l^2 + 4r_0^2}}. \end{aligned}$$

Это выражение полностью совпадает с полученным выше.

ЛЕКЦИЯ 3

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

3-1. Поток вектора напряженности электростатического поля

3-2. Теорема Гаусса и ее применение для расчета электростатических полей

3-3. Дифференциальная форма теоремы Гаусса

3-1. Поток вектора напряженности электростатического поля

Поток вектора через поверхность – одно из важнейших понятий векторного поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Рассмотрим маленькую площадку dS с единичным вектором нормали \vec{n} (рис. 3-1). Поток вектора определяется через скалярное произведение вектора поля \vec{E} и элементарную площадку:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS \cos \alpha. \quad (3-1)$$

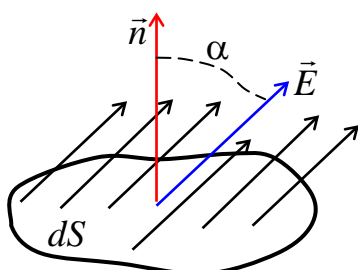


Рис. 3-1

Поток вектора – скалярная величина. Здесь можно провести аналогию с потоком жидкости: поток жидкости через площадку сечением dS равен

$$d\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = dS \cdot v \cos \alpha = \vec{v} \vec{n} dS.$$

Таким образом, поток через элементарную площадку можно записать в виде:

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

Поток через конечную поверхность S равен:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

Найдем поток вектора \vec{E} через замкнутую поверхность.

а) Рассмотрим точечный заряд. Пусть для начала имеем поверхность, окружающую заряд, в виде сферы с центром в точке нахождения заряда (рис. 3-2а).

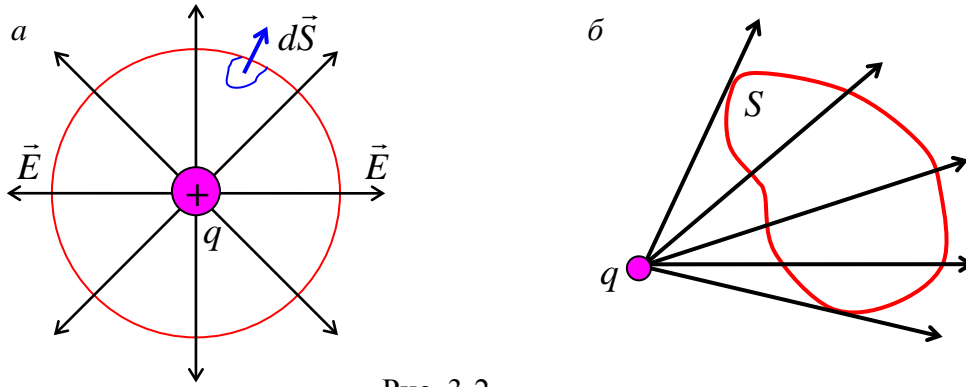


Рис. 3-2

Так как вектор \vec{E} параллелен нормали, то имеем

$$\Phi = \int E_n dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Итак, если заряд q расположен внутри сферы, то поток равен:

$$\hat{O} = \oint E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Если заряд находится снаружи (рис. 3-2, б), то $\Phi = 0$, (сколько силовых линий вошло, столько и вышло).

б) Пусть заряд q находится внутри, но не в центре сферы, а также внутри произвольной замкнутой поверхности S , например как изображено на рис. 3-3. Определим поток через любой элемент этой поверхности dS

$$d\Phi = E dS \cos\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

где $d\Omega = dS/r^2$ – элемент телесного угла.

Из рисунка видно, что элемент телесного угла пересекает 3 элемента поверхности, т. е. имеем 3 потока вектора напряженности электрического поля через эти малые поверхности. При этом один поток, входящий внутрь поверхности S , сокращается с одним потоком, выходящим из поверхности S , так что в сумме остается только один выходящий поток через элемент телесного угла $d\Omega$. Тогда полный поток вектора \vec{E} через всю поверхность S равен опять произведению за-

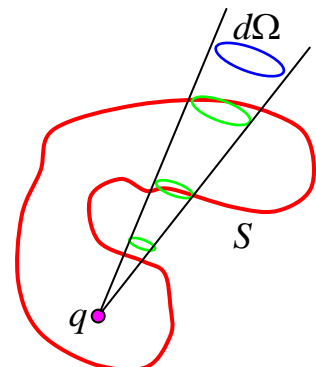


Рис. 3-3

ряда на полный телесный угол:

$$\Phi = q \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

в) Пусть поле создается любой системой зарядов (рис.3-4), тогда всю систему можно разбить на точечные заряды Δq и для каждого из них в отдельности повторить ту же процедуру. Пользуясь принципом суперпозиции, получаем, что уравнение

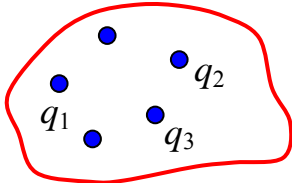


Рис. 3-4

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

можно обобщить для любой системы зарядов, расположенных произвольным образом. В самом деле, поток вектора \vec{E} равен сумме потоков каждого из векторов \vec{E}_i :

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Приведенные выше расчеты показывают, что независимо от вида поверхности, охватывающей заряд, и независимо от вида заряда поток вектора напряженности электростатического поля определяется зарядом, который охвачен поверхностью.

3-2. Теорема Гаусса и ее применение для расчета электростатических полей

Теорема Гаусса для электростатического поля: поток вектора напряженности поля через любую замкнутую поверхность равен полному заряду внутри этой поверхности, деленному на ϵ_0 .

Математически теорема Гаусса в интегральной форме записывается в виде:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3-2)$$

где q – суммарный заряд внутри поверхности S .

Их расположение внутри поверхности не играет никакой роли. Заряды, расположенные вне замкнутой поверхности S не вносят вклада в поток Φ , ибо, сколько силовых линий входит в замкнутую поверхность, столько этих линий и выходит.

Для непрерывного распределения заряда с плотностью ρ теорему Гаусса можно представить в виде:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Теорема Гаусса имеет фундаментальное значение для теории, однако для практического применения ее удобно использовать только для расчета полей, обладающих той или иной симметрией, а также полей, создаваемых протяженными заряженными телами, которые можно считать бесконечными. Рассмотрим некоторые важные примеры.

а). Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Пусть плоскость заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ (Кл/м²). Вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости и нормали \vec{n} к ней.

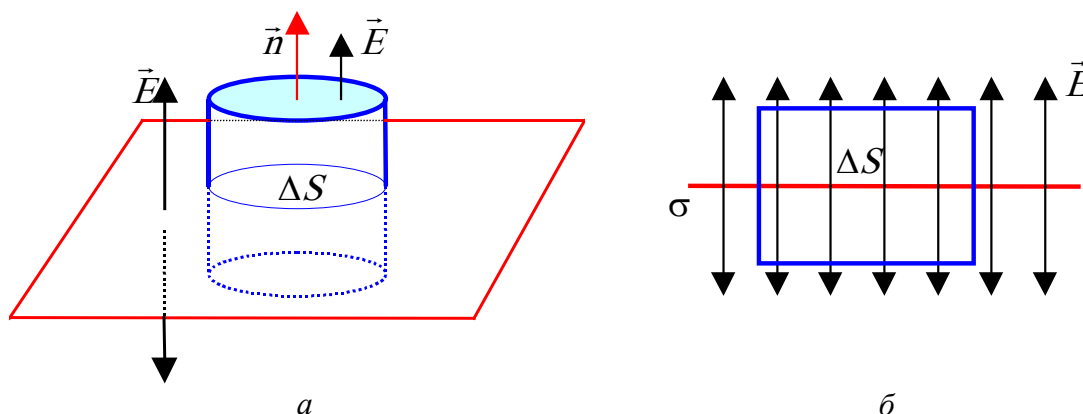


Рис. 3-5

В качестве поверхности, через которую определим поток вектора напряженности электрического поля, выбираем цилиндрическую поверхность (сечение этой поверхности есть прямоугольник, см. рис. 3-5, а, б). Поскольку поле вверх или вниз одинаково, а поток через боковую поверхность равен 0 (из-за того, что вектор \vec{E} перпендикулярен нормали к этой поверхности), имеем:

$$\oint E_n dS = 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}.$$

Сокращая на элемент поверхности, получаем поле от равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (3-3)$$

б) Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (нити).

Найдем поле бесконечной равномерно заряженной нити (или цилиндра) с линейной плотностью заряда τ (заряд на единицу длины). В силу симметрии вектор напряженности электрического поля направлен радиально, т. е. перпендикулярно к оси нити (см. рисунки). Следовательно, для определения поля как функции расстояния от нити удобно выбрать цилиндрическую поверхность с осью, совпадающей с осью нити. Поток вектора напряженности \vec{E} через торцы цилиндрической поверхности равен нулю (см вид сбоку), в силу перпендикулярности векторов \vec{E} и \vec{n} , и остается поток только через боковую поверхность цилиндра. Последний в силу параллельности \vec{E} и \vec{n} определить легко (рис. 3-6, а). Используя теорему Гаусса, имеем:

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\tau h}{\varepsilon_0}.$$

где h – длина выбранной цилиндрической поверхности.

Тогда получаем электрическое поле, создаваемое бесконечной, равномерно заряженной нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (3-4)$$

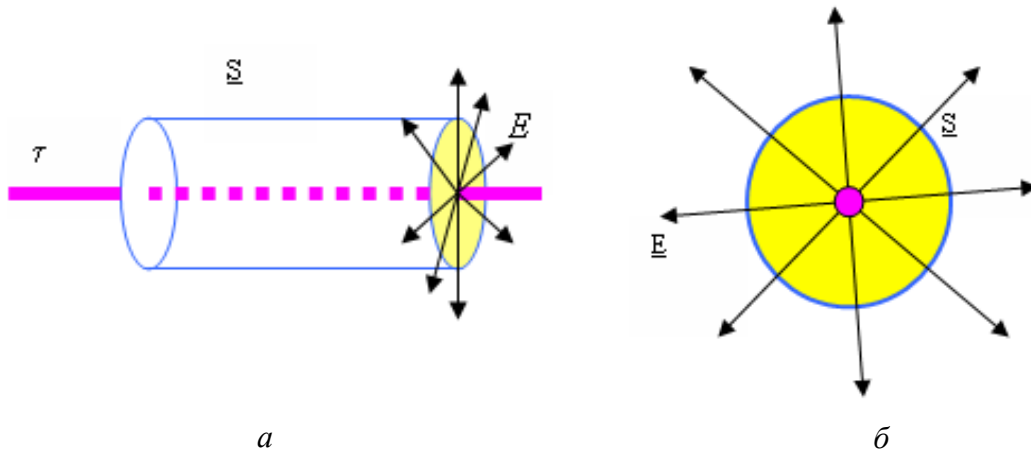


Рис. 3-6

Из (3-4) видно, что поле убывает медленнее с увеличением расстояния от нити, чем в случае точечного заряда.

Если цилиндр радиуса R имеет поверхностную плотность заряда σ , а внутри его зарядов нет, то получаем:

$$\begin{aligned} r > R, \quad E &= \frac{\sigma R}{r \epsilon_0}, \\ r < R, \quad E &= 0. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Аналогично можно получить величину поля в случае заряженного цилиндра с постоянной плотностью объемного заряда как внутри, так и снаружи цилиндра.

в) Поле равномерно заряженного шара радиуса R (рис. 3-7).

Пусть имеем шар радиуса R , заряженный равномерно по всему объему с плотностью заряда ρ . Из соображений симметрии электрическое поле направлено радиально. Сначала находим поле вне шара. Для этого окружаем шар сферой радиуса $r > R$ и находим поток вектора напряженности электрического поля, который по теореме Гаусса равен полному заряду внутри сферы:

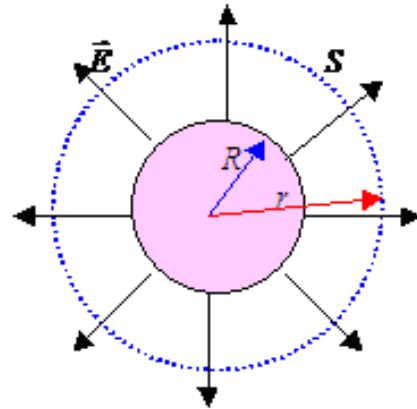


Рис.3-7

$$\Phi = \int E_n dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3 \rho}{\epsilon_0}. \quad (3-6)$$

Отсюда получим поле, совпадающее с полем точечного заряда:

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{1}{3} \frac{\pi R^3 \rho}{\epsilon_0 r^2}. \quad (3-7)$$

Для определения поля внутри шара выбираем соответствующую поверхность: сферу внутри шара $r < R$. Тогда по теореме Гаусса получаем соотношение аналогичное (3-6), но только в правой части стоит заряд, заключенный внутри сферы радиуса $r < R$, величина которого зависит от радиуса выбранной поверхности:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E = 4\pi q_{\text{int}} = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \rho.$$

Отсюда получим поле внутри равномерно заряженного шара:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r. \quad (3-8)$$

Соотношение (3-8) легко записать в векторном виде, поскольку поле внутри шара направлено по радиусу:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}. \quad (3-9)$$

3-3. Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Дифференциальная (или локальная) форма теоремы Гаусса расширяет ее возможности как инструмента исследования и расчета, Форму (3-2) называют интегральной теоремой Гаусса. В дифференциальной форме теоремы устанавливается связь между объемной плотностью заряда и изменениями напряженности поля в окрестности данной точки пространства.

Для этого представим сначала заряд q в объеме V , охватываемом замкнутой поверхностью S , как $q = \rho_{\text{ср}} V$, где $\rho_{\text{ср}}$ – среднее по объему V значение объемной плотности заряда. Затем подставим это выражение в уравнение (3-2) и разделим обе части его на V . В результате получим

$$\frac{1}{V} \oint_S E_n dS = \frac{\rho_{\text{ср}}}{\varepsilon_0}. \quad (3-10)$$

Теперь устремим объем V к нулю, стягивая его к интересующей нас точке поля. Очевидно, при этом $\rho_{\text{ср}}$ будет стремиться к значению ρ в данной точке поля, а значит, отношение в левой части уравнения (3-10) будет стремиться к $\rho_{\text{ср}}/\varepsilon_0$.

Величину, являющуюся пределом правой части этого равенства при $V \rightarrow 0$, называют дивергенцией поля \vec{E} и обозначают $\text{div } \vec{E}$. Таким образом, по определению:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S E_n dS = \text{div } \vec{E}. \quad (3-11)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из определения (3-11) следует, что дивергенция является скалярной функцией координат. Чтобы получить выражение для дивергенции поля \vec{E} , надо согласно (3-11) взять бесконечно малый объем V , определять поток вектора \vec{E} через замкнутую поверхность, ох-

ватывающую этот объем, и найти отношение этого потока к объему. Полученное выражение для дивергенции будет зависеть от выбора системы координат (в разных системах координат оно оказывается разным). Например, в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Таким образом, при $V \rightarrow 0$ в выражении (3-10) его правая часть стремится к $\rho_{\text{ср}}/\epsilon_0$, а левая – к $\operatorname{div} \vec{E}$. Следовательно, дивергенция поля \vec{E} связана с плотностью заряда в той же точке уравнением

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3-12)$$

Это уравнение и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме. В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция напряженности поля в данной точке зависит только от плотности электрического заряда ρ в той же точке и больше ни от чего. Это одно из замечательных свойств электрического поля. Например, в разных точках поля точечного заряда поле \vec{E} отличается друг от друга. Это же относится, вообще говоря, и к пространственным производным $\partial E_x/\partial x$, $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$. Однако, как утверждает теорема Гаусса, сумма этих производных, которая определяет дивергенцию \vec{E} , оказывается во всех точках поля (вне самого заряда) равной нулю.

В тех точках поля, где дивергенция \vec{E} положительна, мы имеем источники поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, – стоки (отрицательные заряды). Линии вектора \vec{E} выходят из источников поля, а в местах стоков они заканчиваются.

ЛЕКЦИЯ 4

ВЕЩЕСТВО В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ДИЭЛЕКТРИКИ

4-1. Свободные и связанные заряды в веществе

4-2. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков, виды поляризации

4-3. Вектор поляризации Диэлектрическая восприимчивость.

4-4. Сегнетоэлектрики

4-1. Свободные и связанные заряды в веществе. Электрический диполь

Вещество состоит из атомов и молекул. Размеры ядер и электронов по сравнению с размерами атомов малы, примерно в 10^5 раз меньше размеров атома. На долю заряженных частиц приходится очень маленький объем, равный примерно 10^{-15} от занимаемого телом пространства. Весь остальной объем – вакуум. Электроны и ядра возбуждают в нем электрические и магнитные поля.

Различают два типа веществ, поведение которых в электрическом поле существенно различается. Это проводники, диэлектрики, полупроводники и различные промежуточные вещества.

Проводники содержат заряды (свободные электроны), которые могут свободно перемещаться по объему, занимаемому веществом. Эти заряды получили название свободных.

Диэлектрики: проводят ток в 10^{15} – 10^{20} раз хуже проводников, состоят из атомов и молекул, чей полный заряд равен нулю (существуют ионные диэлектрики, в которых полный заряд равен нулю для элементарной ячейки), а размер атомов и молекул $\sim 10^{-9}$ – 10^{-10} м. В диэлектриках в отличие, например, от проводников нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток. Заряд, возникающий под действием внешнего поля на поверхности или в объеме диэлектрика, называется связанным (этот заряд не может перемещаться свободно относительно атомов и молекул вещества). Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, и являются свободными (иногда их называют сторонними).

При внесении даже нейтрального диэлектрика во внешнее электрическое поле обнаруживаются существенные изменения как в поле, так и в самом диэлектрике; последнее следует хотя бы из того, что на

диэлектрик начинает действовать сила, увеличивается емкость конденсатора при заполнении его диэлектриком и др.

Молекулу диэлектрика можно рассматривать как систему зарядов, которая в целом электронейтральна, но у которой может быть пространственное распределение электрического заряда. Это распределение проявляется при внесении молекулы в электрическое поле, – положительные и отрицательные заряды, входящие в молекулу, начнут смещаться в противоположных направлениях. Так как на долю заряженных частиц приходится очень малый объем, то диэлектрик можно рассматривать как совокупность точечных зарядов, разделенных большим расстоянием. Для описания свойств заряженных тел

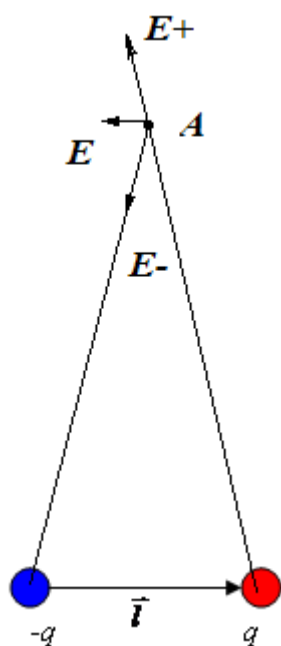


Рис. 4-1

вводится понятие *электрического диполя*.

Точечный *электрический диполь* – система 2-х одинаковых по величине, но разных по знаку, точечных зарядов (рис. 4-1), расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до точки, где определяется поле системы. Вектором дипольного момента называют произведение $\vec{p} = q\vec{l}$, где q – абсолютная величина заряда, \vec{l} – плечо диполя, вектор \vec{l} направлен от отрицательного заряда к положительному. Так же направлен и электрический дипольный момент \vec{p} .

Можно показать, что при $r \gg l$ напряженность поля, создаваемого точечным электрическим диполем, обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя ($\sim 1/r^3$) и направлена противоположно вектору \vec{p} . Это означает, что при внесении диполя во внешнее электрическое поле напряженность в точке A (рис. 4-1) уже будет несколько меньше чем в вакууме. Таким образом, электрическое поле внутри вещества ослабляется.

Количественно величина ослабления поля характеризуется отношением $\varepsilon = E_d/E_0$, которое называют *диэлектрической проницаемостью среды* (здесь E_0 и E_d – напряженностей электрического поля в вакууме и диэлектрике, соответственно).

4-2. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков, виды поляризации

Под действием внешнего электрического поля происходит поля-

ризация диэлектрика, т. е. появление на его поверхностях нескомпенсированных зарядов. Это явление заключается в следующем. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в пределах каждой молекулы происходит смещение зарядов – положительных по полю, отрицательных против поля. Если же диэлектрик состоит из полярных молекул, то при отсутствии внешнего поля их дипольные моменты ориентированы совершенно хаотически (из-за теплового движения). Под действием же внешнего поля дипольные моменты ориентируются преимущественно в направлении внешнего поля. Наконец, в диэлектрических кристаллах (ионных кристаллах) типа NaCl при включении внешнего поля все положительные ионы смещаются по полю, отрицательные – против поля. Таким образом, механизм поляризации связан с конкретным строением диэлектрика. Однако существенно лишь то, что независимо от механизма поляризации в этом процессе все положительные заряды смещаются по полю, а отрицательные – против поля. Смещение зарядов в обычных условиях весьма мало даже по сравнению с размерами молекул, это связано с тем, что «напряженность внешнего поля, действующего на диэлектрик, значительно меньше напряженности внутренних электрических полей в атомах и молекулах.

По механизму поляризации выделяются следующие типы диэлектриков:

а) Неполярные диэлектрики. *Неполярные молекулы* не имеют дипольного момента в отсутствие внешнего поля $\vec{p} = 0$. Это симметричные молекулы: H_2 , O_2 , N_2 , CH_4 и другие.

б) Полярные диэлектрики. *Полярные молекулы*: они обладают собственным дипольным моментом. К ним относятся: CO, NH, HCl, N_2O , H_2O , SO_2 и другие. Дипольный момент молекул обычно $\sim 10^{-29} - 10^{-30}$ Кл · м. В диэлектриках из полярных молекул без внешнего поля дипольные моменты располагаются хаотично, и внутреннего электрического поля не возникает.

в) Ионные кристаллы.

Неполярные молекулы. (H_2O , HCl, HBr, CO, спирты, эфиры и др.). Поляризация возникает при смещении отрицательных зарядов относительно положительных зарядов, и молекулы приобретают дипольные моменты (рис. 4-2, а). При этом возникающие дипольные моменты \vec{p} можно рассматривать как упругие диполи, причем величина наведенного диполя пропорциональна приложенному полю. Последнее справедливо для не слишком сильных внешних полей. Моле-

кулы и их дипольные моменты ориентированы так, что на поверхности появляется наведенный заряд – поляризация.

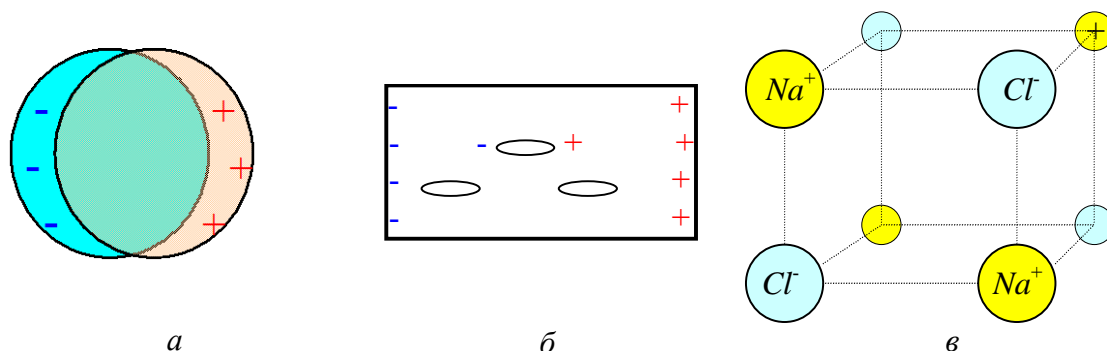


Рис.4-2

б) Полярные молекулы (рис. 4-2, б). Без внешнего поля их дипольные моменты расположены хаотично. Под влиянием внешнего поля происходит выстраивание диполей, что также приводит к поляризации. Часто внешнее поле значительно слабее внутренних атомных полей и поэтому обычно не влияет на величину дипольного момента (т. е. рассматривается «жесткий диполь»), а только поворачивает их. Так как тепловое движение влияет на ориентацию отдельных диполей, то свойства полярных диэлектриков зависят от температуры.

в) Ионные кристаллы (рис. 4-2, в). Не содержат свободных электронов. Пример: кристаллы NaCl. Во внешнем поле происходит смещение положительных и отрицательных подрешеток целиком и это ведет к поляризации.

4-3. Вектор поляризации. Диэлектрическая восприимчивость

Количественное описание поляризации производится с помощью *вектора поляризации*. Когда внешнего поля нет, суммарный дипольный момент равен нулю (исключение составляют сегнетоэлектрики, электреты). Под влиянием внешнего электрического поля возникает поляризация, которую характеризуют *дипольным моментом единицы объема* – *вектором поляризации* \vec{P} :

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}. \quad (4-1)$$

Здесь \vec{p} – дипольный момент молекулы. Размерность вектора поляризации Кл/м².

Естественно, что вектор поляризации зависит от внешнего поля,

как и наведенный поляризационный (связанный) заряд. Вектор поляризации зависит от связанного заряда. Модуль вектора поляризации называют *поляризованностью*.

Так как смещение зарядов в молекуле при не очень сильных полях можно считать пропорциональным напряженности поля, то дипольный момент молекулы можно считать также пропорциональным напряженности поля, которое действует на молекулу:

$$p = \beta \epsilon_0 E, \quad (4-2)$$

где коэффициент β называют поляризуемостью молекулы. Этот коэффициент зависит от строения молекулы.

Пусть диэлектрик находится в электрическом поле, и будем считать сначала, что поле, действующее на молекулу, совпадает со средним полем E внутри диэлектрика. Тогда каждая молекула диэлектрика имеет дипольный момент p , выражаемый формулой (4-1). Если n – число молекул в единице объема диэлектрика, то электрический момент единицы объема (поляризованность) равен:

$$\vec{P} = n\vec{p}. \quad (4-3)$$

Как показывает опыт, для обширного класса диэлектриков поляризованность P зависит линейно от напряженности E поля в диэлектрике. Если диэлектрик изотропный и поле не слишком велико, то

$$P = \alpha \epsilon_0 E, \quad (4-4)$$

где α – диэлектрическая восприимчивость.

Из сопоставления формул (4-1) и (4-4) с учетом (4-3) следует $\alpha = n\beta$. Восприимчивость не зависит от напряженности поля, она характеризует свойства самого диэлектрика. Всегда $\alpha > 0$.

Существуют, однако, и диэлектрики, для которых соотношение (4-4) неприменимо. Это некоторые ионные кристаллы и электреты, а также сегнетоэлектрики. У сегнетоэлектриков связь между P и E нелинейная и зависит, кроме того, от предыстории диэлектрика, т. е. от предшествующих значений E (это явление называют гистерезисом).

В зависимости от того, какие частицы участвуют в упругой поляризации, различают электронную, атомную, ионную и упругую дипольную поляризацию.

Электронная поляризация возникает за счет смещения электронов относительно ядер в атомах (ионах) под действием электрического поля. Для поляризации этого вида характерна «упругая» связь меж-

ду электрическим (дипольным) моментом, который приобретает отдельная частица в электрическом поле, и величиной этого поля. Можно показать, что поляризуемость отдельного атома (иона) приблизительно пропорциональна кубу его радиуса. Время установления этой поляризации 10^{-14} – 10^{-15} с; она имеет место для всех диэлектриков, независимо от их состава и агрегатного состояния.

Атомная поляризация возникает из-за смещения образующих молекулу атомов различного сорта друг относительно друга под действием электрического поля. Атомная поляризация характеризуется поляризуемостью, которая составляет примерно 10% от электронной поляризуемости. Время установления атомной поляризации примерно 10^{-12} – 10^{-13} с.

Ионная поляризация упругого смещения обусловлена смещением в электрическом поле положительных и отрицательных ионов, образующих решетку ионных кристаллов, от их положения равновесия. Время установления этой поляризации 10^{-12} – 10^{-13} с. Примеры ионных кристаллов – NaCl, AgBr, CdBr и др.

Релаксационная поляризация отличается от деформационной тем, что она связана с тепловым движением частиц и потерями энергии в диэлектрике. Различают ориентационную (дипольную) и ионную тепловую поляризации. *Дипольно-релаксационная* поляризация возможна, если молекулярные силы не мешают диполям ориентироваться вдоль поля. С увеличением температуры величина дипольно-релаксационной поляризации сначала возрастает, пока ослабление молекулярных сил сказывается сильнее, чем увеличение интенсивности хаотического теплового движения, а затем из-за преобладания хаотического теплового движения начинает уменьшаться. Эта поляризация свойственна жидкостям (вода, спирты, глицерин и др.), а также полярным органическим веществам (целлюлоза, фенолоформальдегидная смола, галовакс и др.). В последнем случае поляризация (она называется дипольно-радикальной) обусловлена поворотом полярных радикалов относительно молекулы под действием электрического поля. Дипольно-релаксационная поляризация уменьшается с увеличением частоты поля. Время установления этой поляризации зависит от природы вещества, температуры и лежит в пределах 10^{-2} – 10^{-10} с.

4-4. Сегнетоэлектрики

Опыты показывают, что диэлектрическая восприимчивость β твердых кристаллических диэлектриков (полярных и неполярных)

практически не зависит от температуры. Это означает, что в кристаллическом состоянии имеет место электронная поляризация, тогда как ориентационная поляризация не проявляется даже в случае полярных молекул (иначе восприимчивость β зависела бы от температуры). Поэтому, восприимчивость полярных веществ в кристаллическом состоянии существенно меньше, чем в жидком. Например, вода при 18°C имеет $\beta = 80$ ($\beta = \beta(T)$), а для льда $\beta = \text{const}$ ($\beta = 2,1$ при $t = -18^\circ\text{C}$). Однако, существует группа кристаллических диэлектриков, для которых характерно резкое возрастание восприимчивости β в некоторой области температур (значение β достигает нескольких тысяч). Первоначально эти свойства были обнаружены в кристаллах сегнетовой соли, и поэтому все подобные диэлектрики получили название *сегнетоэлектриков*. Сегнетова соль представляет собой двойную натрий-калиевую соль винной кислоты $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. Ее кристаллы принадлежат к ромбической системе и обычно имеют вид, показанный на рис. 4-3, а, где a , b , c – кристаллографические оси. Кристаллы сегнетовой соли обнаруживают резкую анизотропию свойств. Сегнетоэлектрические свойства, описываемые ниже, наблюдаются, если электрическое поле, в которое помещается кристалл, направлено вдоль оси a (рис. 4-3а).

Первая особенность сегнетовой соли заключается в том, что в некотором температурном интервале ее диэлектрическая проницаемость весьма велика и достигает огромного значения: около 10 000.

Второе важное свойство сегнетовой соли обнаруживается при исследовании зависимости электрического смещения от напряженности поля. Смещение оказывается не пропорциональным полю, а значит, диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля. Эта зависимость для разных сегнетоэлектриков различна.

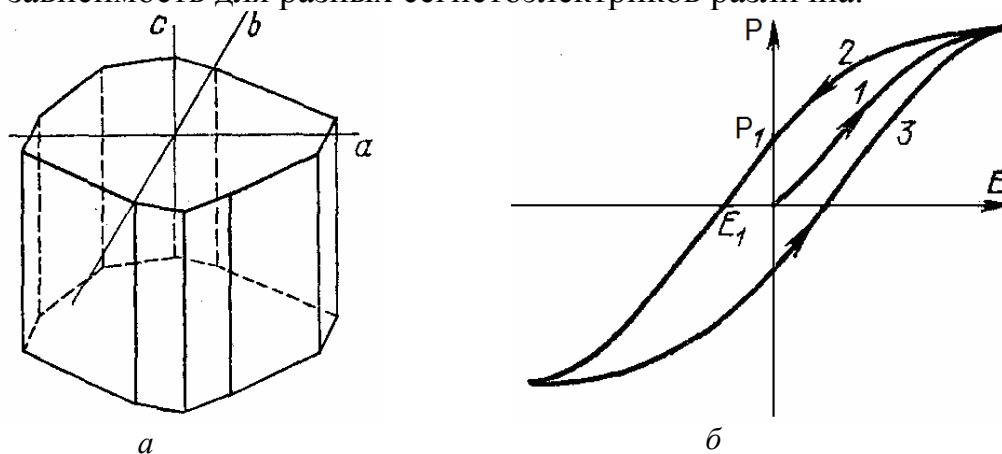


Рис.4-3

Третья особенность состоит в том, что значение электрического смещения в сегнетовой соли определяется не только значением напряженности поля, но зависит еще от предшествовавших состояний поляризации. Это явление называется диэлектрическим гистерезисом. Зависимость поляризованности P от напряженности поля E имеет вид, изображенный на рис. 4-3, б. При первоначальном увеличении поля нарастание смещения описывается ветвью кривой 1, которая является нелинейной. Если затем уменьшать электрическое поле, то уменьшение смещения будет происходить в соответствии с ветвью 2. Когда поле становится равным нулю, поляризованность не равна нулю и изображается отрезком P_1 . Это показывает, что в сегнетовой соли имеется остаточная поляризация и сегнетова соль остается поляризованной даже в отсутствие внешнего электрического поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризацию, нужно создать электрическое поле E обратного направления. При дальнейшем циклическом изменении электрического поля изменение смещения описывается изображенной петлеобразной кривой – петлей гистерезиса.

Эти свойства присущи не только сегнетовой соли, но и всем сегнетоэлектрикам.

Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. При температурах, превышающих определенное значение T_k , различное для разных веществ, сегнетоэлектрические свойства исчезают и сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик. Эта температура называется *температурой Кюри* или *точкой Кюри* в честь Кюри, который впервые обнаружил существование подобной критической температуры при исследовании магнитных свойств железа и сходных с ним веществ (ферромагнетиков). В некоторых случаях, как, например, для сегнетовой соли, существуют две температуры Кюри ($+24^\circ\text{C}$ и -18°C) и сегнетоэлектрические свойства наблюдаются только при температурах, лежащих между обеими точками. Наличие одной или нескольких точек Кюри является четвертым характерным свойством всех сегнетоэлектриков.

Помимо сегнетовой соли сегнетоэлектрическими свойствами обладают и другие соединения, например KN_2PO_4 (фосфат калия) и KN_2AsO_4 . Практически важным сегнетоэлектриком является титанат бария BaTiO_3 . Его точка Кюри лежит около 120°C , а диэлектрическая проницаемость достигает в максимуме 6000–7000.

Сегнетоэлектрики имеют важные практические применения. Приготавливая сложные диэлектрики на основе сегнетоэлектриков и добавляя к ним различные примеси, можно получить конденсаторы большой емкости при малых размерах и придать им высокие качества.

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная поляризация сегнетоэлектриков, возникающая в них под действием особенно сильного взаимодействия между частицами. Под влиянием этого взаимодействия сегнетоэлектрик подразделяется на отдельные области – области самопроизвольной (спонтанной) поляризации, или *диэлектрические домены*, в которых возникает большой электрический момент даже в отсутствие внешнего электрического поля. Спонтанная поляризация в обычных условиях, однако, не проявляется. Если указанные области малы, то поляризованность направлена в разных областях различно и результирующее значение электрического момента всего сегнетоэлектрика близко к нулю (рис. 4-4, *а*). Такое расположение соответствует минимуму энергии, так как в противном случае вокруг сегнетоэлектрика возникло бы электрическое поле, которое содержало бы в себе дополнительную энергию. Если области спонтанной поляризации велики или если даже весь кристалл представляет собой одну такую область, то поляризация обычно все же не проявляется, так как на поверхности кристалла возникают поверхностные заряды (вследствие осаждения ионов из воздуха или за счет электропроводности кристалла), компенсирующие связанные заряды кристалла. Поэтому в обоих случаях могут наблюдаться только изменения электрического момента сегнетоэлектрика, возникающие по каким-либо причинам. Во внешнем электрическом поле происходит изменение направления поляризованности в отдельных областях. Это изменение таково, что векторы поляризации приближаются к положению, параллельному направлению поля, и тем ближе, чем сильнее поле (рис. 4-4, *б*). Кроме того, границы между отдельными областями могут смещаться таким образом, чтобы объем энергетически более выгодных областей увеличивался за счет объема энергетически менее выгодных. Поэтому электрический момент всего сегнетоэлектрика изменяется и это изменение воспринимается как его поляризация. Наличие областей спонтанной поляризации является наиболее общим и точным признаком сегнетоэлектриков.

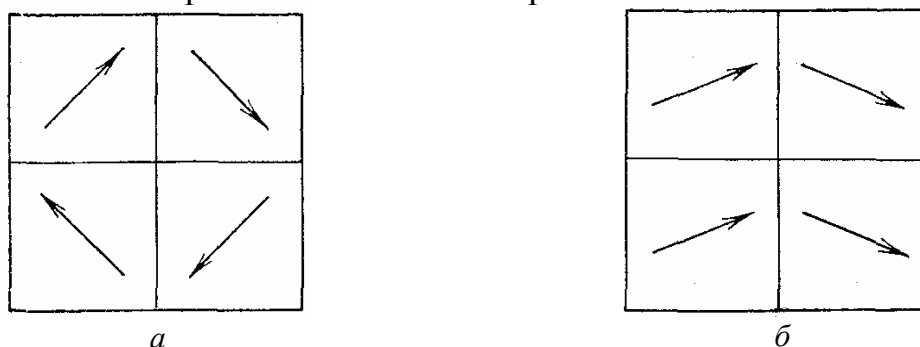


Рис. 4-4

ЛЕКЦИЯ 5

ВЕЩЕСТВО В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ВЕКТОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ

5-1. Теорема Остроградского – Гаусса для векторов поляризации и электрического смещения.

5-2. Поле на границе раздела проводника и диэлектрика.

5-3. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.

5-1. Теорема Остроградского – Гаусса для векторов поляризации и электрического смещения

Рассмотрим диэлектрик, имеющий форму косоугольного параллелепипеда, и поместим его в однородное электрическое поле \vec{E} . На боковых гранях появятся связанные заряды с плотностью σ' . Если S – площадь боковой грани, то диэлектрик приобретает дипольный момент, равный $\sigma' S \vec{l}$, где \vec{l} – вектор длины параллелепипеда, направленный вдоль электрического поля или, что то же, от отрицательных зарядов к положительным. Тогда вектор поляризации равен:

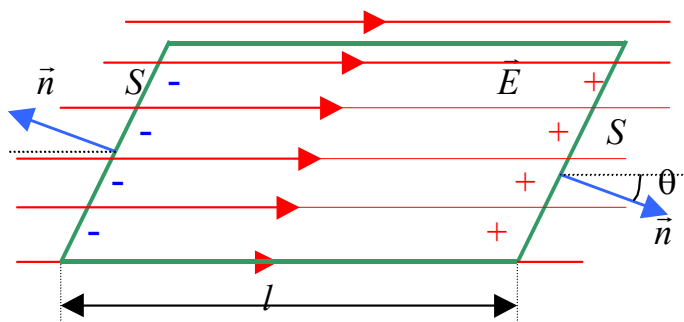


Рис. 5-1

$$\vec{P} = \frac{\sigma' S}{V} \vec{l}. \quad (5-1)$$

Здесь объем параллелепипеда определяется как $V = Sl \cos \theta$, который можно выразить через скалярное произведение вектора нормали к боковой грани и вектора \vec{l} :

$$V = S(\vec{l}, \vec{n}). \quad (5-2)$$

Умножим обе части равенства (5-1) скалярно на вектор нормали \vec{n} , воспользовавшись (5-2), получим:

$$\vec{P}\vec{n} = \frac{\sigma' S}{V}(\vec{l}, \vec{n}) = \sigma'. \quad (5-3)$$

Итак, получаем связь между поверхностной плотностью поляризационного заряда и нормальной составляющей вектора поляризации P_n :

$$\sigma' = \vec{P}\vec{n} = P_n. \quad (5-4)$$

Это уравнение справедливо как для положительного, так и отрицательного зарядов. Отметим, что можно интерпретировать уравнение (5-4) следующим образом: связанный заряд на поверхности появляется при включении внешнего поля как заряд, проходящий (сдвигаемый) изнутри объема через его поверхность.

Выше мы рассматривали однородную поляризацию, когда связанный (поляризационный) заряд появляется только на поверхности. При неоднородной поляризации (которая может возникнуть из-за неоднородности вещества, изменения поля внутри объема и т. д.) появляются объемные связанные заряды. Найдем плотность этих зарядов и свяжем ее с вектором поляризации \vec{P} .

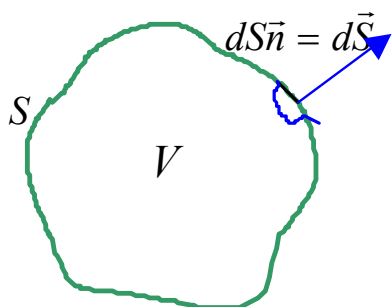


Рис. 5-2

Выделим в диэлектрике произвольный объем V , ограниченный поверхностью S (рис. 5-2). При включении внешнего поля заряд, смещенный при поляризации через площадку dS внутрь объема (т. е. противоположно направлению нормали) можно получить исходя из (5-4):

$$dq' = -P_n dS. \quad (5-5)$$

Через всю поверхность S внутрь поступит заряд равный:

$$q' = -\oint_S P_n dS. \quad (5-6)$$

Таким образом, поток вектора \vec{P} через замкнутую поверхность S равен связанному заряду, взятому с обратным знаком, внутри объема V , ограниченного поверхностью S . Формула (5-6) выражает теорему Гаусса для вектора поляризации.

Физическая интерпретация соотношения (5-6) состоит в следующем. Источником вектора поляризации \vec{P} (т. е. дипольного мо-

мента единицы объема) служат связанные (индуцированные) заряды.

Связанные заряды q' – это такие же обычные заряды, как и заряды q , поэтому теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля \vec{E} имеет вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q + q'}{\epsilon_0}, \quad (5-7)$$

где q – сторонний (свободный) заряд, q' – связанный заряд.

В формулу (5-7) подставим выражение (5-6) для q' :

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5-9)$$

Введем новый вектор – *вектор электрического смещения* с помощью следующего соотношения:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (5-10)$$

Тогда уравнение (5-9) записывается проще:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q. \quad (5-11)$$

Мы получили уравнение системы уравнений Максвелла в интегральной форме. *Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность определяется только свободными зарядами, находящимися внутри этой поверхности.* Уравнение (5-11) – обобщение теоремы Гаусса для электрического поля в веществе. В вакууме вектор поляризации равен нулю $\vec{P} = 0$ и вектор электрического смещения равен $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Из формул (4-4) и (5-10) следует связь между диэлектрической восприимчивостью и диэлектрической проницаемостью:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \Rightarrow \epsilon = 1 + \alpha. \quad (5-12)$$

Вектор электрического смещения (смещения) \vec{D} , как и вектор поляризации \vec{P} , является искусственным вектором. Вектор \vec{D} введен для того, чтобы выделить вклад свободных зарядов в полное электрическое поле. Вектор \vec{P} введен для того, чтобы выделить вклад связанных зарядов в полное электрическое поле. Реальное поле, которое действует на пробные заряды, – есть напряженность электрического поля \vec{E} .

5-2. Поле на границе раздела проводника и диэлектрика

Лучшими проводниками электричества являются металлы. Рассмотрим основные особенности проводников:

1) Имеются свободные заряды, т. е. индукционные заряды разделяются. Для металлов свободными зарядами являются электроны.

2) В равновесии электрическое поле $\vec{E} = 0$ внутри проводника (иначе перераспределение зарядов), поэтому объемная плотность зарядов внутри однородного проводника равна тоже нулю.

3) Электрический заряд может располагаться только на поверхности.

4) Так как $\vec{E} = 0$, то $\phi = \text{const}$ – проводник эквипотенциален.

5) Напряженность поля на поверхности направлена перпендикулярно к ней (иначе возникают токи по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля) $\vec{E} = \vec{E}_n$. То есть тангенциальная составляющая E_τ внутри и вне проводника равна 0. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора \vec{E} и выбрав контур 1–2–3–4 (см рис. 5-3):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 = \sum_{i=1}^4 \int \vec{E}_i d\vec{l}.$$

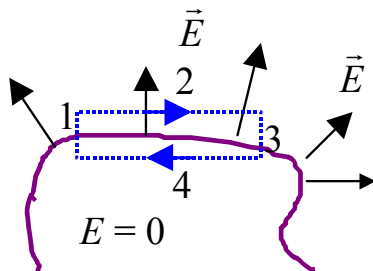


Рис. 5-3

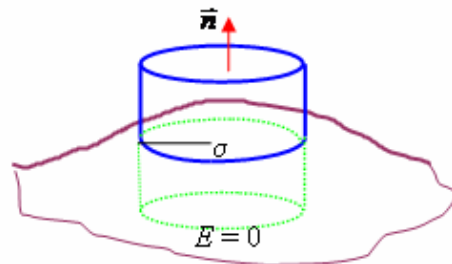


Рис. 5-4

Кусочки контура 1 и 3 можно выбрать произвольно малыми по сравнению с 2 и 4 и, следовательно, интегралы по ним равны нулю. Нулю также равен интеграл по участку 4, где поле равно нулю, поскольку он проходит внутри металла. И в силу произвольности длины (малой) кусочка контура 2 получаем, что $E_\tau = 0$ – тангенциальная составляющая и снаружи проводника равна нулю.

Рассмотрим поле вблизи поверхности проводника. Выделим в приповерхностной области цилиндрическую поверхность (рис.5-4). По теореме Гаусса имеем для выбранной поверхности, вырезающей

на поверхности проводника площадку ΔS с плотностью свободного заряда σ :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

т. к. через нижнее основание и боковую поверхность поток вектора E равен нулю. Тогда поле вблизи поверхности проводника равно:

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда напряженность поля равна:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (5-19)$$

Напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника определяется плотностью свободного заряда. В тех местах, в которых концентрация заряда велика (например, около острий), велика и напряженность поля, которая может достигать огромных значений, вызывающих ионизацию газа и электрический разряд (например, искровой или коронный разряд).

5-3 Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

Рассмотрим границу двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (см рисунок 5-5, а). При этом рассмотрим, что происходит с электрическим полем при переходе из одной среды в другую. Выберем замкнутую цилиндрическую поверхность, охватывающую границу диэлектриков, и воспользуемся теоремой Гаусса для потока вектора напряженности поля через нее:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} (q + q'). \quad (5-20)$$

Здесь q и q' – свободный и связанный заряды внутри выбранного объема. Пусть высота цилиндра достаточно мала, так что $h^2 \ll \Delta S$. Тогда интеграл в (5-20) можно раскрыть следующим образом:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_{2n} \Delta S - E_{1n} \Delta S + \Phi_{\text{бок}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma + \sigma') \Delta S. \quad (5-21)$$

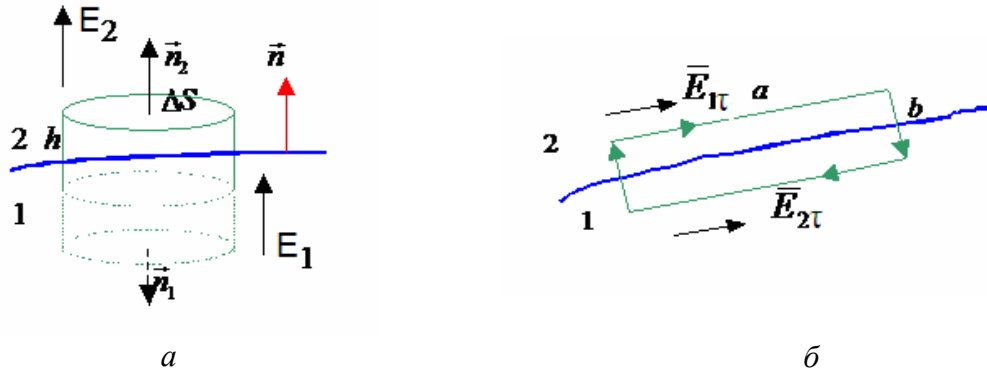


Рис. 5-5

Разные знаки в потоке вектора \vec{E} через основания цилиндра в (5-21) объясняются тем, что проекции на внешнюю нормаль к поверхностям выбранной поверхности в средах 1 и 2 различаются по знаку. Далее, если устремим $h \rightarrow 0$, то при этом $\Phi_{\text{бок}} \rightarrow 0$. Тогда в этом пределе получаем условие для нормальных составляющих напряженности поля на границе 2-х диэлектриков:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma + \sigma'). \quad (5-22)$$

Из (5-22) видно, что нормальная составляющая вектора \vec{E} на границе двух диэлектриков испытывает разрыв.

Аналогично можно сосчитать поток векторов \vec{D} и \vec{P} через такую же цилиндрическую поверхность и получить следующие граничные условия для них:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (5-23)$$

Если на границе 2-х диэлектриков нет свободных зарядов, т. е. $\alpha = 0$, то нормальная составляющая вектора электрического смещения \vec{D} непрерывна, т. е. согласно (5-23):

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (5-24)$$

Для определения изменения тангенциальных составляющих векторов поля воспользуемся теоремой о циркуляции, помещая замкнутый контур вдоль границы раздела двух диэлектриков (см. рисунок 5-5, б):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (5-25)$$

Выберем такой контур, для которого поперечные размеры контура по отношению к границе диэлектриков малы ($a \gg b$):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = aE_{2t} - aE_{1t} + E_n b - E_n b = 0.$$

Откуда получаем (при $b \rightarrow 0$):

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (5-26)$$

Итак, тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны (т. е. не меняются) при переходе через границу раздела диэлектриков.

Для изотропных диэлектриков из формул (5-9) и (5-10) имеем

$$\epsilon\epsilon_0\vec{E} = \vec{D} \quad \text{и} \quad \vec{P} = (\epsilon - 1)\vec{E}, \quad (5-27)$$

Тогда из равенства тангенциальных составляющих напряженности поля следует:

$$\frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1}. \quad (5-28)$$

То есть тангенциальные составляющие вектора электрического смещения терпят разрыв на границе 2-х диэлектриков:

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (5-29)$$

Тангенциальные составляющие вектора поляризации также претерпевают разрыв на границе:

$$\frac{P_{2t}}{\epsilon_2 - 1} = \frac{P_{1t}}{\epsilon_1 - 1}. \quad (5-30)$$

ЛЕКЦИЯ 6

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

6-1. Энергия системы зарядов.

6-2. Электроемкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух тел.

6-3. Конденсаторы и их соединения. Энергия заряженного конденсатора.

6-4. Плотность энергии электрического поля.

6-1. Энергия системы зарядов

При перемещении электрических зарядов совершается работа против сил кулоновского взаимодействия dA . Работа сил электростатического поля по перемещению заряда сопровождается изменением потенциальной энергии этого заряда. Если работа совершается внешними силами, то энергия заряда увеличивается, и наоборот, если работа совершается кулоновскими силами электростатического поля, то энергия заряда уменьшается на величину этой работы. Например, при сближении одноименных зарядов приходится совершать работу против сил отталкивания, а при разведении разноименных зарядов совершается работа против сил притяжения. В обоих случаях потенциальная энергия заряда увеличивается за счет работы внешних сил. Если зарядов несколько, то на данный заряд будет действовать сила со стороны результирующего поля, создаваемого этими зарядами. Запишем известное соотношение между элементарной работой δA и приращением потенциальной энергии dU :

$$\delta A = -dU. \quad (6-1)$$

Рассмотрим систему из двух точечных зарядов. Энергию взаимодействия двух зарядов q_1 и q_2 можно получить двумя способами:

1. Переместим заряд q_2 из бесконечности (где мы как обычно полагаем потенциал равным 0) в точку, отстоящую на расстояние r_{12} от первого заряда. Согласно формулам (2-3), (2-5) и (2-6) приращение потенциальной энергии W_{21} заряда 2 в поле заряда 1 при перемещении заряда q_2 равно:

$$A_{12} = q_2(0 - \varphi_2) = -q_2\varphi_2 = -\frac{kq_1q_2}{r_{12}} = -W_{21}. \quad (6-2)$$

Здесь φ_2 – потенциал, создаваемый электрическим полем заряда q_1 в той точке, в которой находится заряд q_2 .

2. Переместим заряд q_1 из бесконечности в точку, отстоящую на расстояние r_{21} от второго заряда (учтем, что $r_{12} = r_{21}$). Аналогично, согласно формуле (2-5) приращение потенциальной энергии W_{12} заряда 1 в поле заряда 2 при перемещении заряда q_1 равно:

$$A_{21} = q_1(0 - \varphi_1) = -q_1\varphi_1 = -\frac{kq_1q_2}{r_{21}} = -W_{12}. \quad (6-3)$$

Аналогично, φ_1 – потенциал, создаваемый электрическим полем заряда q_2 в той точке, в которой находится заряд q_1 . Из (6-2) и (6-3) следует, что работы перемещения зарядов одинаковы: $A_{12} = A_{21}$. Итак, получаем:

$$W_{12} = W_{21} = W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}},$$

или в симметричной записи:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{k}{2}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_2}{r_{12}}\right). \quad (6-4)$$

Можно показать, что энергия системы точечных зарядов, число которых N больше 2, может быть представлена формулой:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{k}{2} \sum_{\substack{k,i \\ k \neq i}}^N \frac{q_i q_k}{r_{ik}}, \quad (6-5)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми остальными точечными зарядами в точке, где находится i -й заряд.

В случае непрерывного распределения зарядов эту формулу можно обобщить, имея в виду существование объемных и поверхностных зарядов: $dq = \rho dV$, $dq = \sigma dS$:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (6-6)$$

где φ – значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или на элементе поверхности dS .

Интегрирование может вестись по нескольким областям. Здесь речь шла только о сторонних (свободных) зарядах, однако, формула (6-6) справедлива для всех зарядов.

6-2. Емкость проводников. Электроемкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников

Если проводнику сообщается заряд q , то он распределяется единственным образом так, чтобы поле внутри проводника было равно нулю. Это справедливо, когда проводник уединенный, т.е. когда нет поблизости других тел, заряды которых, могут вызвать перераспределение зарядов на нашем проводнике.

Итак, рассматриваем уединенный проводник. Если на него добавим еще заряд Δq , то он распределится аналогичным образом, но только вырастет напряженность поля вблизи поверхности и потенциал проводника. Опыт показывает, что потенциал проводника пропорционален его заряду:

$$q \sim \varphi, \quad q = C\varphi, \quad (6-7)$$

где коэффициент пропорциональности есть *емкость* уединенного проводника C .

Пример. Емкость уединенного шара.

Рассмотрим металлический шар радиуса R . Пусть этот шар равномерно заряжен зарядом q , тогда его потенциал равен:

$$\varphi = -\int_R^{\infty} E dr = -k \int_R^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{kq}{R} \Rightarrow q = \frac{R}{k} \varphi = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R \varphi. \quad (6-8)$$

Из последнего равенства (6-8) следует, что емкость шара согласно (6-7) равна $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

В системе СИ единица емкости 1 Фарада. Фарада – очень большая величина, так 1 Ф – это емкость шара радиусом $9 \cdot 10^9$ м. В рассмотрение вводят обычно величины: мФ, мкФ, пкФ.

Конденсаторы – 2 металлические обкладки, отделенные слоем диэлектрика. Заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку. На практике конденсатор выполняется так, чтобы внешние поля не влияли на поле между обкладками. Заряд на одной из обкладок конденсатора связан с разностью потенциалов между обкладками с помощью коэффициента пропорциональности, который называют *емкостью конденсатора*:

Так как линии электрического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, то заряды, находящиеся на обкладках простого конденсатора, всегда равны по модулю и противоположны по знаку. Напряженность поля в любой точке между обкладками кон-

денсатора всегда пропорциональна заряду обкладок. Поэтому и напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками всегда пропорционально заряду обкладок q :

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6-9)$$

В формуле (6-9) C – емкость конденсатора. Емкость конденсатора зависит от его конструкции. Наиболее распространенные конденсаторы: *плоский*, *цилиндрический* и *сферический*. Рассмотрим простейшие случаи.

1) Плоский конденсатор. Представляет собой две параллельные пластинки, между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 6-1). Расстояние между пластинами равно d , площадь пластин равна S . Напряжение на конденсаторе: $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. Электрическое поле внутри конденсатора – однородное, его можно выразить через плотность свободного заряда σ и диэлектрическую проницаемость согласно (5-19) и (5-20):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{S}, \quad (6-10)$$

где q – свободный заряд на обкладке.

Пользуясь формулой (2-7), можно получить связь между напряжением и полем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}.$$

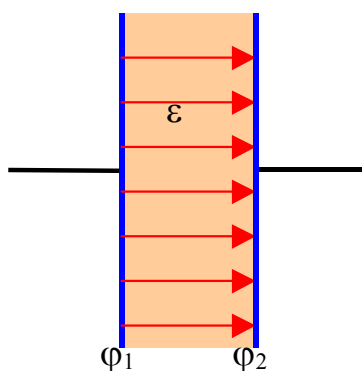


Рис. 6.1

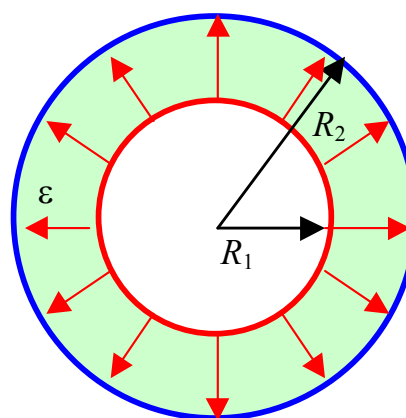


Рис. 6.2

Откуда получаем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (6-11)$$

2) Сферический конденсатор. Обкладками являются 2 концентрические сферы, радиусами R_1 и R_2 , между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 6-2). Разность потенциалов определяется из соотношения

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kq}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Емкость сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (6-12)$$

3) Цилиндрический конденсатор. Обкладками являются 2 коаксиальных цилиндра радиусами a и b . Длина цилиндров равна l (при этом считаем, что l достаточно велико по сравнению с расстоянием между обкладками), между ними расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε . Напряженность поля внутри цилиндрического конденсатора (между цилиндрами) легко получить по теореме Гаусса:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние, отсчитываемое от оси симметрии; λ – заряд, приходящийся на единицу длины одного из цилиндров.

Тогда разность потенциалов равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b \frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора на единицу длины:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln(b/a)}. \quad (6-13)$$

6-3. Конденсаторы и их соединения. Энергия заряженного конденсатора

Если напряжение на конденсаторе сделать слишком большим, то конденсатор «пробивается», т. е. между его обкладками возникает ис-

кра (внутри диэлектрика или по его поверхности) и конденсатор пор-
тится вследствие нарушения изоляции. Поэтому каждый конденсатор
характеризуется не только своей емкостью, но еще и максимальным
рабочим напряжением. Для того чтобы, располагая определенными
конденсаторами, осуществить желаемую емкость при нужном рабочем
напряжении, конденсаторы соединяют в батареи. На рис. 6-3, *а* пока-
но параллельное соединение конденсаторов. В этом случае общим для
всех конденсаторов является напряжение U , и мы имеем

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \dots$$

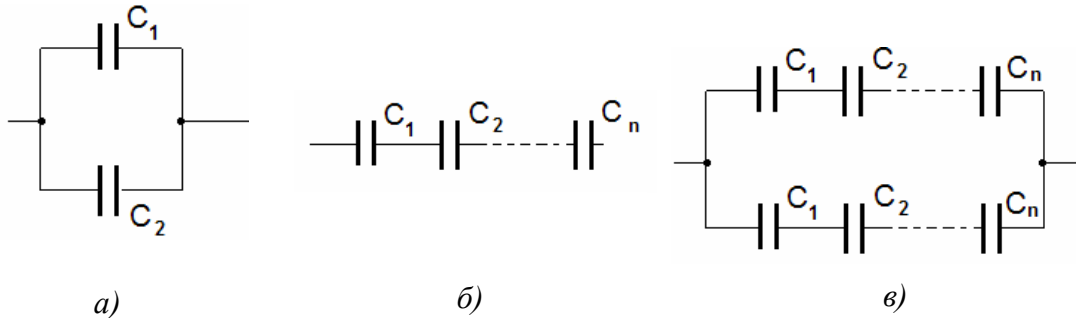


Рис. 6-3

Суммарный заряд, находящийся на батарее, равен

$$q = \sum q_i = U \sum C_i,$$

и поэтому емкость батареи

$$C = \sum C_i. \quad (6-14)$$

Емкость батареи конденсаторов, соединенных параллельно, равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. Так как в этом случае напряжение на каждом конденсаторе равно напряжению на батарее, то и допустимое рабочее напряжение батареи будет таким же, как и у одного конденсатора.

На рис. 6-3, *б* изображено последовательное соединение конденсаторов. По закону электростатической индукции заряд q одинаков для всех конденсаторов и равен полному заряду батареи. Поэтому можно написать

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \dots,$$

Напряжение же батареи будет равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах, т. е.:

$$U = \frac{q}{C} = \sum U_i = q \sum \frac{1}{C_i}.$$

Поэтому для емкости C всей батареи, находим

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (6-15)$$

При последовательном соединении конденсаторов суммируются обратные значения емкостей. В этом случае напряжение на каждом конденсаторе будет меньше напряжения на батарее, и поэтому допустимое рабочее напряжение будет больше, чем у одного конденсатора.

На рис. 6-3, в показано смешанное соединение конденсаторов. Емкость такой батареи легко определить, пользуясь формулами (6-14) и (6-15).

Найдем энергию, запасаемую в конденсаторе. Сначала рассмотрим энергию уединенного проводника. Пусть вначале потенциал проводника равен нулю $\varphi = 0$, затем на проводник помещаем заряд q , тогда потенциал проводника $\varphi = q/C$. Теперь вносим заряд dq и определим работу, затраченную на перемещение заряда против сил отталкивания, т. е. приращение потенциальной энергии:

$$dW = \varphi dq = \frac{q}{C} dq, \quad W = \frac{1}{C} \int_0^{q_0} q dq = \frac{q_0^2}{2C}, \quad \text{или:}$$

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} q_0 \varphi = \frac{1}{2} C \varphi^2. \quad (6-16)$$

Теперь можно определить энергию заряженного конденсатора. Энергия конденсатора равна сумме энергий двух заряженных проводников, т. е. двух противоположно заряженных обкладок. Для него справедлива формула $W = 1/2(q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_-)$. Так как $q_+ = q_- = q$, то $W = 1/2 q(\varphi_+ - \varphi_-)$. Аналогично (6-16) получим

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (6-17)$$

где $U = \varphi_+ - \varphi_-$ — разность напряжений между обкладками конденсатора.

6-4. Плотность энергии электрического поля

Найдем энергию, запасаемую в плоском конденсаторе. Емкость его равна $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$, а энергия согласно (6-11) и (6-17):

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S \varphi^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d \varphi^2}{2d^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V. \quad (6-18)$$

Последнее соотношение очень важно, так как определяет энергию через электрическое поле внутри конденсатора. Можно ввести *плотность энергии* внутри конденсатора:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (6-19)$$

Объем V можно сделать сколь угодно малым, настолько, что поле внутри этого объема можно считать однородным, т. е. E – постоянным. Тогда (6-18) можно представить в виде:

$$dW = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (6-20)$$

Можно показать, что в общем случае энергия системы зарядов объемной плотностью ρ и с поверхностной плотностью σ может быть выражена через электрическое поле, создаваемое этой системой:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV, \quad (6-21)$$

где интегрирование в правой части ведется по объему, в котором поле отлично от нуля.

Формула (6-21) определяет электрическую энергию W через величину, характеризующую само электрическое поле, через напряженность. Подынтегральное выражение в этом уравнении имеет смысл энергии, заключенной в объеме dV . Формулы (6-18) и (6-19) получены при рассмотрении предельного случая, плоского конденсатора с довольно простой геометрией. Энергия конденсатора заключена в объеме, ограниченном его обкладками, т. е. объемом, в котором существует поле. Формулы (6-20) и (6.21) имеют более универсальный смысл, они являются выражением важной физической идеи о локализации энергии в самом поле. Данное предположение нашло опытное подтверждение в области переменных во времени полей. В переменных полях встречаются явления, которые можно истолковать на основе идеи о локализации энергии в поле. Именно переменные поля могут существовать независимо от возбудивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн.

Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию, т. е. *носителем энергии является само поле*.

Пример 1. Собственная энергия.

Рассмотрим электрический заряд на маленьком шарике радиуса r_0 . Определим его энергию по двум формулам (6-5) и (6-21):

$$1) W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = 0.$$

$$2) W = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2r_0} \neq 0.$$

Вопрос: в чем различие? Дело в том, что выражение для энергии через электрическое поле (6-21) учитывает так называемую *собственную энергию заряда*. Если бы мы приписали заряду q конечный объем, разбили бы его на элементарные заряды dq и сосчитали бы энергию, то получили бы собственную энергию больше 0.

Собственная энергия – это работа сил взаимного отталкивания, которую они бы произвели, если бы все части заряда разлетелись на бесконечное расстояние. Эта энергия также равна работе, которую следует затратить, чтобы «собрать» сам заряд из частей его составляющих.

Пример 2. Полная энергия 2-х зарядов $-q_1$ и q_2 . Поле создаваемое зарядом q_1 – E_1 , поле, создаваемое q_2 – E_2 , при этом результирующее поле равно векторной сумме этих напряженностей. Тогда энергия поля 2-х зарядов равна:

$$W = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \left(\int E_1^2 dV + \int E_2^2 dV + 2 \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV \right) = W_{11} + W_{22} + W_{12}. \quad (6-22)$$

Здесь W_{11} и W_{22} – собственные энергии зарядов q_1 и q_2 , соответственно; W_{12} – энергия взаимодействия зарядов

$$W_{12} = \epsilon \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV = k \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} \right) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (6-23)$$

Из того, что $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 \geq 0$, следует, что

$$E_1^2 + E_2^2 \geq 2 \vec{E}_1 \vec{E}_2, \quad W_{11} + W_{22} \geq W_{12}.$$

Положительная собственная энергия зарядов всегда больше или равна взаимной энергии зарядов, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Итак:

1) при перемещениях зарядов, не меняющих размеров и формы зарядов, собственная энергия является аддитивной добавкой к энергии (т. е. ее можно не учитывать);

2) энергия электростатического поля свойством аддитивности не обладает, т. е. $W \neq W_1 + W_2$.

Рассмотрим, какова энергия электрического поля в диэлектриках. Преобразуем выражение (6-18) с учетом известного соотношения для однородных диэлектриков $D = \epsilon\epsilon_0$:

$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V = \frac{ED}{2} V. \quad (6-24)$$

Можно показать, что в диэлектрике энергия поля выражается через векторы напряженности и индукции:

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E}, \vec{D}) dV, \quad (6-25)$$

т. е. плотность энергии равна

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}. \quad (6-26)$$

Формула (6-26) учитывает наличие диэлектрика и является общим выражением для плотности энергии электрического поля. Из (6-24) видно, что при одном и том же значении напряженности поля величина w при наличии диэлектрика оказывается в ϵ раз больше, чем при отсутствии диэлектрика. Это объясняется тем, что при создании поля в диэлектрике совершается дополнительная работа, связанная с поляризацией. И под энергией поля в диэлектрике следует понимать всю энергию, которую нужно затратить на возбуждение электрического поля, а она складывается из собственной электрической энергии и той дополнительной работы, которая совершается при поляризации диэлектрика. Подставим в (6-26) вместо D величину $\epsilon_0 E + P$, тогда получим:

$$W = \frac{\epsilon(\epsilon_0 E + P)}{2} V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2} V.$$

Первое слагаемое здесь совпадает с плотностью энергии электрического поля в вакууме. Это собственная энергия поля. Второе слагаемое представляет собой энергию поляризации диэлектрика.

ЛЕКЦИЯ 7

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

7-1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока.

7-2. Закон Ома для замкнутой цепи в интегральной и дифференциальной формах. Сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи.

7-3. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленных цепей.

7-4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

7-1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока.

Электрический ток, как известно, представляет собой перенос заряда через ту или иную поверхность S (например, через сечение проводника). Носителями тока в проводящей среде могут быть электроны (в металлах), либо ионы (в электролитах), либо другие частицы. При отсутствии электрического поля носители тока совершают хаотическое движение и через любую воображаемую поверхность S проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей того и другого знака, так что ток через поверхность S равен нулю. При включении же электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение с некоторой средней скоростью v и через поверхность S появится ток. Таким образом, электрический ток – это, по существу, упорядоченный перенос электрических зарядов.

Сила тока. Количественной мерой электрического тока служит сила тока I , т. е. заряд, переносимый сквозь рассматриваемую поверхность S в единицу времени, $I = dQ/dt$. Единицей силы тока является ампер (А).

Плотность тока. Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Поэтому для более детальной характеристики тока вводят вектор плотности тока \vec{j} . Модуль этого вектора численно равен отношению силы тока dI через элементарную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей, к ее площади dS : $j =$

$= dI/dS$. За направление вектора \vec{j} принимают направление вектора скорости и упорядоченного движения *положительных* носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости упорядоченного движения отрицательных носителей). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой

$$\vec{j} = \rho_- \vec{u}_- + \rho_+ \vec{u}_+, \quad (7-1)$$

где ρ_+ и ρ_- – объемные плотности положительного и отрицательного зарядов – носителей; \vec{u}_- и \vec{u}_+ – скорости их упорядоченного движения.

В проводниках же, где носителями являются только электроны, плотность тока:

$$\vec{j} = \rho_- \vec{u}_-. \quad (7-2)$$

Поле вектора \vec{j} можно изобразить графически с помощью линий тока (линий вектора \vec{j}), которые проводят так же, как и линии вектора \vec{E} . Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности S , можно найти и силу тока через эту поверхность как поток вектора \vec{j} :

$$I = \oint_S j_n dS, \quad (7-3)$$

где j_n – проекция вектора плотности тока на нормаль к поверхности S .

Сила тока I является величиной скалярной и алгебраической. Ее знак, как видно из формулы (7-3), определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали в каждой точке поверхности S .

Условия существования постоянного электрического тока:

1. Цепь должна быть замкнута. В противном случае течение зарядов невозможно.

2. В цепь должен быть включен источник энергии (источник сторонних сил), включенный между двумя точками цепи. Этот источник непрерывно совершает работу, восстанавливая нескомпенсированный заряд в одной точке цепи, в то время как в другой точке этот заряд непрерывно компенсируется притоком носителей.

При протекании постоянного электрического тока в некоторой цепи, состоящей из проводников, количество заряда, выходящего через любое поперечное сечение проводника в единицу времени, долж-

но быть равно количеству заряда, входящего в это сечение. В противном случае внутри проводника возникнет электрическое поле, которое ускорит или замедлит носители зарядов. В результате ток изменится и постоянным уже не будет.

Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность S . Для замкнутых поверхностей векторы нормалей принято брать наружу, поэтому интеграл $\oint j_n dS$ дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема V , охватываемого поверхностью S . В силу закона сохранения заряда этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени внутри объема V :

$$\oint_S j_n dS = -\frac{dq}{dt}. \quad (7-4)$$

Это соотношение называют *уравнением непрерывности*. Оно является, по существу, выражением закона сохранения электрического заряда.

В случае стационарного (постоянного) тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным, т. е. в правой части (7-4) $dq/dt = 0$. Следовательно, для постоянного тока

$$\oint_S j_n dS = 0, \quad (7-5)$$

иначе говоря, линии вектора \vec{j} в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются.

В дифференциальной форме уравнение непрерывности записывается через дивергенцию вектора \vec{j} :

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7-6)$$

Отсюда вытекает условие стационарности (когда производная в правой части равна нулю):

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (7-7)$$

Оно означает, что в случае постоянного тока поле вектора \vec{j} не имеет источников, а линии тока замкнуты и непрерывны, т. е. не имеют ни начала ни конца. Ток протекает как в проводнике, так и внутри источника энергии, а величина его в любом сечении цепи одна и та же.

7-2. Закон Ома для замкнутой цепи в интегральной и дифференциальной формах. Сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Закон Ома открыт экспериментально, его содержание следующее: *сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению U):*

$$I = \frac{U}{R}, \quad (7-8)$$

где R – электрическое сопротивление проводника. Это интегральная форма закона Ома.

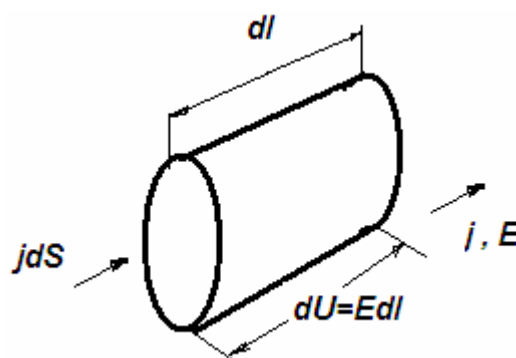
Единицей сопротивления служит Ом (Ом). Сопротивление R зависит от формы и размеров проводника, от его материала и температуры, а также от распределения тока по проводнику. В простейшем случае однородного цилиндрического проводника сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (7-9)$$

где l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения; ρ – удельное электрическое сопротивление, которое зависит от материала проводника и его температуры.

Выражают ρ в (Ом · м). Значения удельного электрического сопротивления для лучших проводников (медь, алюминий) составляют при комнатной температуре порядка 10^{-8} Ом · м.

Найдем связь между плотностью тока \vec{j} и полем \vec{E} в той же точке проводящей среды. Ограничимся случаем изотропного про-



водника, в котором направления векторов \vec{j} и \vec{E} совпадают. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными вектору \vec{j} , а значит, и вектору \vec{E} . Если поперечное сечение цилиндра dS , а его длина dl (рис. 7-1), то на основании (7-8) и (7-9) можно записать для такого элементарного цилиндра:

$$jdS = \frac{Edl}{\rho(dl/dS)}$$

и после соответствующих сокращений получим, в векторном виде,

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (7-10)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводимость среды.

Единицу, обратную Ому, называют *сименсом* (См), поэтому единицей σ является (См/м). Соотношение (7-10) и выражает *закон Ома в дифференциальной* форме. Оно не содержит дифференциалов (производных), а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника.

Как следует из закона (7-10), для поддержания постоянного тока в проводнике необходимо постоянно поддерживать постоянной напряженность поля в каждой точке проводника. Если бы все действующие на носители тока силы сводились к силам электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из мест с большим потенциалом к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это вело бы к выравниванию потенциалов, и в результате все соединенные между собой проводники приобрели бы одинаковый потенциал – ток прекратится. Чтобы этого не произошло, в цепи постоянного тока наряду с участками, где положительные носители тока движутся в сторону уменьшения потенциала φ , должны иметься участки, на, которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания φ , т. е. против сил электрического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил не электростатического происхождения. Это так называемые *сторонние силы*.

Таким образом, для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы, действующие либо на отдельных участках цепи, либо во всей цепи. Физическая природа сторонних сил может быть различной. Они могут быть обусловлены, например, химической и физической неоднородностью проводника – таковы силы, возникающие при соприкосновении разнородных проводников (гальванические элементы, аккумуляторы) или проводников различной температуры (термоэлементы) и др.

Для количественной характеристики сторонних сил вводят понятие поля сторонних сил и его напряженность \vec{E}^* . Этот вектор численно равен сторонней силе, действующей на единичный положительный заряд. Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называют неоднородным. Очевидно, что при совместном действии поля в данной точке проводника \vec{E} и поля сторонних сил \vec{E}^* плотность тока будет равна:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (7-11)$$

Это уравнение обобщает закон (7-10) на случай неоднородных участков проводящей среды. Оно выражает *обобщенный закон Ома* в дифференциальной форме.

Рассмотрим частный, но практически важный случай, когда электрический ток течет вдоль *тонких проводов*. В этом случае направление тока будет совпадать с направлением оси провода и плотность тока j может считаться одинаковой во всех точках сечения провода. Разделим, уравнение (7-11) на σ , а полученное выражение умножим скалярно на элемент оси провода dl , взятый по направлению от сечения 1 к сечению 2 (его мы примем за положительное), и затем проинтегрируем по длине провода от сечения 1 до сечения 2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (7-12)$$

Преобразуем подынтегральное выражение у первого интеграла: заменим σ на $1/\rho$ и $\vec{j} d\vec{l}$ на $j_1 dl$, где j_1 – проекция вектора \vec{j} на направление вектора $d\vec{l}$. Далее учтем, что j_1 – величина алгебраическая; она зависит от того, как направлен вектор \vec{j} по отношению к $d\vec{l}$ если j параллельно $d\vec{l}$, то $j_1 > 0$ и наоборот. Заменим j на I/S , где I – сила тока. Поскольку для постоянного тока I одинаково во всех сечениях цепи, эту величину можно вынести за знак интеграла. В результате получим

$$\int_1^2 \frac{j d\vec{l}}{\sigma} = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}. \quad (7-13)$$

Выражение $\rho dl/S$ определяет не что иное, как сопротивление участка цепи длиной dl , а интеграл от этого выражения – полное сопротивление R участка цепи между сечениями 1 и 2.

Теперь рассмотрим правую часть (7-12). Первый интеграл является разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Второй интеграл представляет собой электродвижущую силу (ЭДС) E , действующую на данном участке цепи. Эта величина, как и сила тока I , является алгебраической: если ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении, то $E_{12} > 0$, если же препятствует, то $E_{12} < 0$. После всех указанных преобразований уравнение (7-12) будет иметь следующий вид:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}. \quad (7-15)$$

Уравнение (7-15) выражает интегральную форму закона Ома для неоднородного участка цепи в отличие от уравнения (7-11), представляющего тот же закон в дифференциальной форме. Этот закон устанавливает связь между током на участке цепи, содержащем сторонние силы, и напряжением на этом участке. В практическом плане с помощью закона Ома для неоднородного участка цепи можно вычислить разность потенциалов U между двумя точками цепи и определить знак этой разности. Или, зная U , можно вычислить ток на участке цепи.

7-3. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленных цепей.

Расчет разветвленных цепей, например нахождение токов в отдельных ее ветвях, значительно упрощается, если пользоваться двумя правилами Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа – оно относится к узлам цепи, т. е. к точкам ее разветвления: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum I_k = 0. \quad (7-17)$$

При этом токи, текущие к узлу, и токи, исходящие из узла, следует считать величинами разных знаков, например: первые – положительными, вторые – отрицательными (или наоборот – это не существенно). Уравнение (7-17) является следствием условия стационарности (7-7); если бы это было не так, в узле изменялся бы заряд и токи не были бы стационарными.

Второе правило Кирхгофа – относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру: *алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре*:

$$\sum I_k R_k = \sum E_k. \quad (7-18)$$

Для доказательства этого правила достаточно рассмотреть случай, когда выделенный контур состоит из трех участков (см. рис. 7-2). Зададим направление обхода, например, по часовой стрелке, как показано на рисунке. Затем применим к каждому из трех участков закон Ома (7-15):

$$R_1 I_1 = \varphi_3 - \varphi_1 + E_1, \quad R_2 I_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + E_2, \quad R_3 I_3 = \varphi_2 - \varphi_3 + E_3.$$

Сложив эти равенства, приходим после сокращения всех потенциалов к формуле (7-18), т. е. ко второму правилу Кирхгофа. Таким образом, уравнение (7-18) является следствием закона Ома для неоднородных участков цепи.

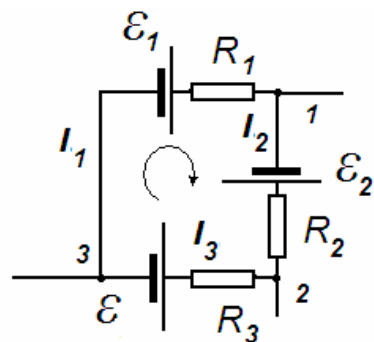


Рис. 7.2

Составление системы уравнений. Правила Кирхгофа в каждом конкретном случае позволяют написать полную систему алгебраических уравнений, из которой могут быть найдены, например, все неизвестные токи. Уравнений (7-17) и (7-18) надо составлять столько, чтобы их число было равно числу искомых величин. При этом надо следить, чтобы одни уравнения не являлись следствием других. При составлении уравнений типа (7-17) и (7-18) следует соблюдать следующие правила.

1. Обозначить стрелками предположительные направления токов, не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если в результате вычисления окажется, что такой-то ток положителен, то это значит, что его направление выбрано правильно. Если же ток окажется отрицательным, то его истинное направление противоположно направлению стрелки.

2. Выбрав произвольно замкнутый контур, все его участки следует обойти в одном направлении, например по часовой стрелке. Если предположительное направление некоторого тока совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слагаемое IR в уравнении (7-18) надо брать со знаком плюс, если же эти направления противоположны, то со знаком минус. Аналогично следует поступать и с ЭДС: если какая-то ЭДС повышает потенциал в направлении обхода, ее надо брать со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

7-4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах

С прохождением тока через проводник, обладающий сопротивлением, неразрывно связано выделение теплоты (нагревание проводников). Допустим, требуется найти количество теплоты, выделяющееся за единицу времени на определенном участке цепи. Здесь возможны два случая, – однородный и неоднородный участки цепи. В основу решения этого вопроса мы возьмем закон сохранения энергии и закон Ома.

Однородный участок цепи. Пусть интересующий нас участок заключен между сечениями 1 и 2 проводника (см. рис. 7-3). Найдём работу, которую совершают силы поля над носителями тока на участке 12 за время dt . Если сила тока в проводнике равна I , то за время dt через каждое сечение проводника пройдет заряд $dq = Idt$. В частности, такой заряд dq войдет внутрь участка через сечение 1 и такой же заряд выйдет из этого участка через сечение 2. Так как распределение зарядов в проводнике остается при этом неизменным (ток постоянный), то весь процесс эквивалентен непосредственному переносу заряда dq от сечения 1 к сечению 2, имеющих потенциалы φ_1 и φ_2 . Поэтому совершаемая при таком переносе работа сил поля равна

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt.$$

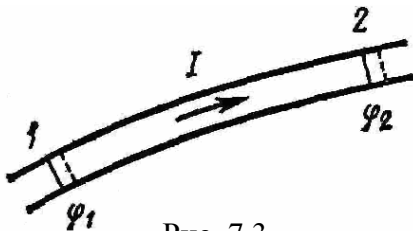


Рис. 7.3

Согласно закону сохранения энергии эквивалентная этой работе энергия должна выделяться в иной форме. Если проводник неподвижен и в нем не происходят химические превращения, то эта энергия должна выделяться в виде внутренней (тепловой) энергии, в результате чего проводник нагревается. Механизм этого превращения заключается в том, что носители тока (например, электроны в металлах) в результате работы сил поля приобретают дополнительную кинетическую энергию и затем расходуют ее на возбуждение колебаний решетки при столкновении с атомами в ее узлах.

Согласно закону сохранения энергии элементарная работа $\delta A = Qdt$, где Q – теплота, выделяемая в единицу времени (тепловая мощность). Из сравнения последнего равенства с предыдущим получаем:

$$Q = I(\varphi_1 - \varphi_2).$$

По закону Ома $\varphi_1 - \varphi_2 = RI$, поэтому:

$$Q = RI^2. \quad (7-19)$$

Эта формула выражает известный закон Джоуля – Ленца. Получим выражение этого закона в дифференциальной форме, характеризующей выделение теплоты в различных местах проводящей среды. Для этой цели выделим в данной среде элементарный объем в виде цилиндрика с образующими, параллельными вектору \vec{j} – плотности тока в данном месте. Пусть поперечное сечение цилиндрика dS , а его длина dl . Тогда на основании закона Джоуля – Ленца в этом объеме за время dt выделяется количество теплоты

$$\delta Q = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt,$$

где $dV = dSdl$ – объем цилиндрика.

Разделив последнее уравнение на $dVdt$, получим формулу, которая определяет количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема проводящей среды, т. е. удельную тепловую мощность тока:

$$\omega = \frac{\delta Q}{dVdt} = \rho j^2. \quad (7-20)$$

Формула (7-20) выражает закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме: *удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке*. Уравнение (7-20) представляет собой наиболее общую форму закона Джоуля – Ленца, применимую к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности и от природы сил, возбуждающих электрический ток. Если на носители тока действуют только электрические силы, то на основании закона Ома (7-10)

$$\delta P = jE = \sigma E^2. \quad (7-21)$$

Таким образом, последнее уравнение имеет менее общий характер, чем (7-20).

Неоднородный участок цепи. Если участок цепи содержит источник э.д.с, то на носители тока будут действовать не только электрические силы, но и сторонние. В этом случае выделяемое в неподвижном проводнике тепло будет равно по закону сохранения энергии

алгебраической сумме работ электрических и сторонних сил. Это же относится и к соответствующим мощностям: тепловая мощность должна быть равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Умножим выражение (7-15) на I :

$$RI^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon I. \quad (7-22)$$

В выражении (7-22) слева стоит выделяющаяся на участке тепловая мощность Q ; при наличии сторонних сил величина Q определяется той же формулой (7-19), что и для однородного участка цепи. Последнее же слагаемое справа представляет собой мощность, развиваемую сторонними силами на данном участке. Заметим еще, что последняя величина (εI) является алгебраической: в отличие от RI^2 она изменяет знак при изменении направления тока I . Таким образом, уравнение (7-22) означает, что тепловая мощность, выделяемая на участке цепи между точками 1 и 2, равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Сумму этих мощностей, т. е. правую часть (7-22), называют мощностью тока на рассматриваемом участке цепи. Тогда можно сказать, что в случае неподвижного участка цепи мощность выделяемой на этом участке теплоты равна мощности тока.

Применив (7-22) ко всей неразветвленной цепи (тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$), получим

$$P = \varepsilon I, \quad (7-23)$$

т. е. общее количество выделяемой за единицу времени во всей цепи джоулевой теплоты равно мощности только сторонних сил. Значит, теплота производится только сторонними силами. Роль же электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет эту теплоту по различным участкам цепи.

ЛЕКЦИЯ 8

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

8-1. Классическая теория электропроводности металлов.

8-2. Вывод законов Ома, Джоуля – Ленца и Видемана – Франца на основе классических представлений.

8-3. Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов.

8-4. Границы применимости закона Ома.

8-1. Классическая теория электропроводности металлов

Классическая теория электропроводности металлов объясняет механизм электропроводности металлов, исходя из классических представлений:

1. Электроны перемещаются под действием электрического поля с ускорением, которое определяется по 2 закону Ньютона.

2. Электрическое сопротивление металлов обусловлено столкновением электронов с ионами в узлах решетки, которые считаются абсолютно неупругими, т. е. электрон при соударении отдает иону всю энергию упорядоченного движения. Поэтому в проводнике выделяется джоулева теплота – проводник нагревается

3. Электроны в металле представляются как частицы идеального газа, т. е. кулоновские силы взаимодействия между электронами пренебрежимо малы. Средняя скорость электронов определяется по формулам, полученным для идеального газа.

8-2. Вывод законов Ома, Джоуля – Ленца и Видемана – Франца на основе классических представлений.

Вывод закона Ома. Найдем среднюю скорость, которую приобретает электрон под действием поля E между двумя последовательными столкновениями с ионами в узлах кристаллической решетки, т. е. на расстояниях, приблизительно равных средней длине λ свободного пробега (см. рис. 8-1). В случае постоянного тока движение электрона между соударениями будет происходить под действием усредненного однородного поля $E = \text{const}$. Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона получим:

$$ma = eE \Rightarrow a = \text{const} \Rightarrow at \Rightarrow u_{\max} = \frac{eE}{m_e} \tau. \quad (8-1)$$

Предположим, что столкновения электронов с ионами в узлах решетки являются абсолютно неупругими, т. е. электрон при соударении отдает иону всю энергию упорядоченного движения (поэтому в проводнике выделяется джоулева теплота – проводник нагревается). Зависимость мгновенной скорости $u(t)$ электрона будет иметь пилообразный вид (см. рис. 8-1), соответствующий чередующимся столкновениям с последующим равноускоренным разгоном. Скорость электронов $u_e(t)$ изменяется при этом от нуля до u_{\max} за среднее время τ свободного пробега электрона:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_e} = \frac{\lambda}{v_T + u_e} \approx \frac{\lambda}{v_T}, \quad u_e \ll v_T.$$

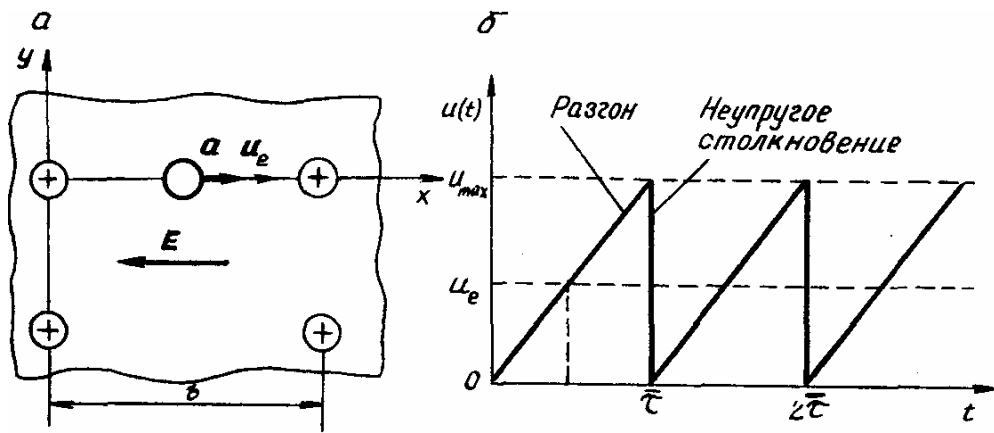


Рис.8-1

Средняя скорость дрейфа равна:

$$\bar{u}_e = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{eE}{2m_e} \bar{\tau} = \frac{e\bar{\lambda}E}{2m_e v_T}.$$

Поэтому плотность тока:

$$j_e = en_e \bar{u}_e = \frac{e^2 n_e \bar{\lambda}}{2m_e v_T} E. \quad (8-2)$$

После сравнения выражения (8-2) с законом Ома в дифференциальной форме получим выражение для удельной электрической проводимости:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \bar{\lambda}}{2m_e v_T}. \quad (8-3)$$

Таким образом, полученное выражение совпадает по виду с законом Ома ($j = \sigma E$), однако, температурная зависимость удельного сопротивления $\rho \sim 1/T$ не совпадает с экспериментальной линейной зависимостью. Это расхождение является следствием использования законов классической физики, тогда как при рассмотрении поведения электронов в металлах следует учитывать их квантовую природу.

Вывод закона Видемана – Франца. Высокая электропроводность металлов самым непосредственным образом связана с их хорошей теплопроводностью. Количественно эта связь была обнаружена экспериментально в 1853 г. Г. Видеманом (1826–1899) и Р. Францем (1827–1902), а в последующем исследована Л. Лоренцем. Оказалось, что отношение коэффициента теплопроводности, K , к удельной электрической проводимости σ для всех металлов линейно зависит от температуры T (закон Видемана – Франца), т. е. $K/\sigma = LT$, где L – число Лоренца.

Вещество в металлическом состоянии состоит из двух подсистем – электронного газа и решетки. Кристаллические диэлектрики, не имеющие свободных носителей заряда, обладают очень слабой по сравнению с металлами электропроводностью и теплопроводностью. Поэтому в приведенной выше теории предполагается, что высокая теплопроводность металлов обусловлена электронной подсистемой, представляющей собой идеальный газ из частиц – электронов. Такое представление оправдано, так как расстояние между электронами в любом металле достаточно велико, поэтому, кулоновские силы электростатического взаимодействия пренебрежимо малы. К тому же, силы отталкивания между электронами уравниваются силами притяжения к ионам, которые расположены в узлах решетки. Известное выражение для коэффициента теплопроводности электронного газа преобразуем к следующему виду:

$$K = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}_T C_v^{\text{уд}} = \frac{1}{2} k n_e \bar{\lambda} \bar{v}_T, \quad (8-4)$$

где ρ – плотность электронного газа (m – масса электрона; n_e – концентрация электронов проводимости); \bar{v}_T – средняя скорость хаотического движения электронов; $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега электронов, а удельная теплоемкость электронного газа равна:

$$C_v = \frac{3R}{2\mu} = \frac{3k}{2m}, \quad (k \text{ – постоянная Больцмана}).$$

Используя выражение (8-3), получим:

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2} k n_e \bar{\lambda} v_T}{e^2 n_e \bar{\lambda} / (2 m_e v_T)} = \frac{k n_e m_e v_T^2}{e^2} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Из сравнения с экспериментальным законом Видемана – Франца находим число Лоренца:

$$L = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T = 3 \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right)^2 \approx 2,23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \text{К}^2},$$

которое оказалось только немного меньше экспериментального значения.

Следовательно, классическая теория правильно объясняет закон Видемана – Франца, однако здесь наблюдается случайное совпадение. В самом деле, согласно этой теории, удельная электрическая проводимость обратно пропорциональна $T^{1/2}$, а опыт дает $\gamma \sim 1/T$. Это означает, что соответствующее расхождение имеется и для коэффициента теплопроводности согласно (8-4) (по теории коэффициент теплопроводности пропорционален T , так как $v_T \sim T^{1/2}$, $K = LT\sigma = \text{const}$), которое как раз и приводит к правильному результату для отношения K/σ . Другими словами, теоретические зависимости $K(T)$ и $\sigma(T)$ взаимно компенсируются при определении их отношения.

В рамках предположений классической электронной теории можно получить математическое выражение для закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Для этого надо найти приращение средней кинетической энергии электрона проводимости за время t , соответствующее двум его последовательным столкновениям с ионами решетки, а затем рассчитать энергию, переданную электронами единичному объему кристаллической решетки за единицу времени, т. е. плотность тепловой мощности тока.

8-3. Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов

Теплоемкость металла, согласно классической теории, должна состоять из теплоемкости электронного газа ($C_V = 3R/2$) и решеточной теплоемкости $C = 3R$ (закон Дюлонга и Пти). Поэтому теоретическая молярная теплоемкость металла $C = 3R/2 + 3R = 9R/2 = 37,5 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, а эксперименты дают $C \sim 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. В этом несоответствии тео-

ретических предсказаний с экспериментальными фактами (фактическое отсутствие теплоемкости у электронного газа) проявляется еще одна трудность классической электронной теории, которая разрешается квантовой теорией проводимости и теплопроводности. Полного совпадения теории и эксперимента для проводимости, а также теплопроводности и теплоемкости металлов удается достичь только в рамках квантовой теории металлов. Оценка средней длины λ свободного пробега электронов проводимости с помощью формулы дает значение $\sim 10^{-8}$ м, что на два порядка превышает постоянную кристаллической решетки в металле ($\sim 10^{-10}$ м) и, следовательно, находится в явном противоречии с исходными предположениями классической электронной теории.

8-4. Границы применимости закона Ома

Закон Ома в форме $j = \sigma E$, а следовательно и в виде $I = U/R$, выполняется главным образом для однородных проводящих сред, в таких условиях, в которых удельная электропроводность постоянна σ и не зависит от E . Однако, эти условия выполняются лишь в определенном диапазоне напряженностей электрического поля. С ростом напряженности поля возрастает количество выделяемого джоулева тепла, что сопровождается ростом температуры и изменением σ .

Для большинства проводников с ростом температуры удельная электропроводность уменьшается (в металлах и полупроводниках), или возрастает (в некоторых полупроводниковых материалах). В металлах влияние температуры выражено сравнительно слабо. В полупроводниках концентрация свободных носителей σ очень сильно зависит от температуры. Эта зависимость следует из распределения Максвелла – Больцмана для концентрации носителей и для большинства полупроводников имеет экспоненциальный вид :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right). \quad (8-5)$$

Таким образом, σ , которая пропорциональна n , с ростом температуры начинает зависеть от E и линейная зависимость $j = \sigma E$ нарушается.

В классической электронной теории проводимость определяется кратковременными соударениями электронов с малоподвижными атомами и не учитывается взаимодействие электронов друг с другом.

Между тем, при очень низких температурах взаимодействие между электронами может играть решающую роль. Частота электрон – электронных столкновений при низких температурах зависит от E , т. е. удельная электропроводность σ при низких температурах начинает зависеть от E .

Закон Ома нарушается также в средах, в которых σ при данной температуре сильно зависит от напряженности электрического поля. Важнейшими примерами являются электрический ток в вакуумном промежутке и электрический разряд в газах.

Электрический ток в вакууме создается внешним источником (например, с помощью термоэлектронной эмиссии). При наличии термоэлектронной эмиссии в пространстве между катодом и анодом в любой момент времени находятся электроны, движущиеся от катода к аноду, которые образуют облако отрицательного заряда (*пространственный заряд*).

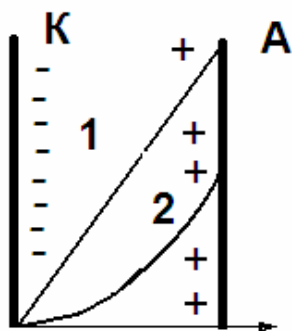


Рис. 8-2

Этот пространственный заряд изменяет распределение потенциала в диоде. Если катод К и анод А представляют собой плоские пластины, параллельные друг другу (рис. 8-2), то в отсутствие пространственного заряда (при холодном катоде) распределение потенциала между катодом и анодом, образующими плоский конденсатор, изображается прямой линией 1. При наличии термоэлектронного тока (накаливание катода) между катодом и анодом возникает пространственный заряд и распределение потенциала изме-

няется; оно выражается теперь кривой 2. При этом значение потенциала в любой плоскости x оказывается меньше, чем в отсутствие пространственного заряда, а следовательно, и скорости движения электронов при наличии пространственного заряда уменьшаются. С увеличением анодного напряжения концентрация электронов в облаке пространственного заряда уменьшается. Поэтому и тормозящее действие пространственного заряда делается меньше, и анодный ток увеличивается.

Зависимость тока i в плоско-параллельном вакуумном промежутке от потенциала анода U линейной не является и имеет вид

$$i = BU^{3/2},$$

где коэффициент B зависит от формы и размеров электродов. Таким

образом, пространственный заряд является причиной отклонения тока в вакууме от закона Ома.

В газах закон Ома выполняется лишь в слабых электрических полях, при которых носители зарядов совершают дрейф, причем скорость дрейфа пропорциональна напряженности поля. С ростом электрического поля электроны между соседними столкновениями приобретают достаточную кинетическую энергию, чтобы ионизировать нейтральный атом (ионизация – это процесс отрыва электрона от атома). Количество носителей заряда, создаваемых электронным ударом с ростом напряженности поля резко возрастает (ударная ионизация) и проводимость газового промежутка, заключенного между электродами, также резко возрастает. В результате зависимость тока от напряжения на промежутке становится нелинейной.

ЛЕКЦИЯ 9

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

9-1. Поле движущегося заряда. Относительный характер электрического и магнитного полей. Вектор магнитной индукции.

9-2. Закон Био – Савара – Лапласа.

9-3. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле тороида и соленоида.

9-4. Магнитный поток. Теорема Гаусса для потока индукции магнитного поля.

9-1. Поле движущегося заряда. Относительный характер электрического и магнитного полей. Вектор магнитной индукции

Опыт показывает, что сила, действующая на точечный заряд q , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости \vec{v} . Соответственно силу разделяют на две составляющие – электрическую \vec{F}_e (она не зависит от движения заряда, а определяется его величиной) и магнитную \vec{F}_m (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости \vec{v} заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору \vec{v} ; кроме того, в любом месте магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению и, наконец, ее модуль пропорционален той составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Все эти свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля. Характеризуя это поле вектором \vec{B} , определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, запишем выражение для магнитной силы в виде

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд q :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ее называют силой Лоренца. Последнее выражение является универсальным, т. к. оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей, причем при любых значениях скорости заряда.

По действию силы Лоренца на заряд можно в принципе определить модули и направления векторов \vec{E} и \vec{B} . Поэтому, выражение для силы Лоренца можно рассматривать как определение электрического и магнитного полей.

Следует подчеркнуть, что на покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. Магнитное поле действует только на движущийся заряд. Вектор \vec{B} характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд и, следовательно, является в этом отношении аналогом вектора \vec{E} , характеризующего силовое действие электрического поля.

Важной особенностью магнитной силы является то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому работы над зарядом не совершает. Это значит, что в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы всегда остается неизменной, как бы частица ни двигалась.

В нерелятивистском приближении сила Лоренца, как и любая другая сила, не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Вместе с тем, магнитная составляющая силы Лоренца в силу зависимости от скорости меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому, должна меняться и электрическая составляющая. Отсюда следует, что разделение полной силы на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разделение не имеет смысла.

Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами). В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий поле \vec{B} точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью v . Этот закон записывается в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (9-1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная (равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения. Конец радиус-вектора неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью \vec{v} (см. рис. 9-1), поэтому вектор \vec{B} в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. В соответствии с этой формулой вектор \vec{B} направлен перпен-

дикулярно плоскости, в которой расположены векторы \vec{v} и \vec{r} , причем вращение вокруг вектора \vec{v} в направлении вектора \vec{B} образует с направлением \vec{v} правовинтовую систему. Величину \vec{B} называют магнитной индукцией. Единицей магнитной индукции служит тесла (Тл). Электрическое поле точечного заряда q , движущегося с нерелятивистской скоростью, описывается тем же законом зависимости от \vec{r} . Поэтому выражение (9-1) можно представить в виде

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = (\vec{v} \times \vec{E}) / c^2, \quad (9-1)$$

где c – электродинамическая постоянная, которая равна скорости света в вакууме.

Пример. Сравнение сил магнитного и электрического взаимодействий движущихся зарядов. Пусть два достаточно массивных точечных заряда q движутся параллельно друг другу с одинаковой нерелятивистской скоростью \vec{v} , как показано на рис. 9-2. Найти отношение магнитной и электрической сил, действующих, например, со стороны заряда 1 на заряд 2.

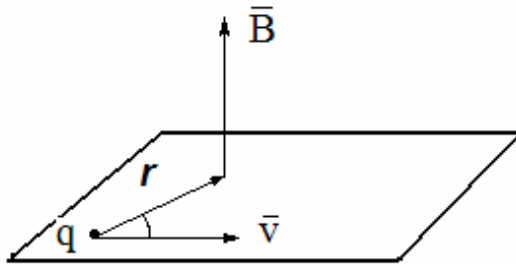


Рис. 9-1

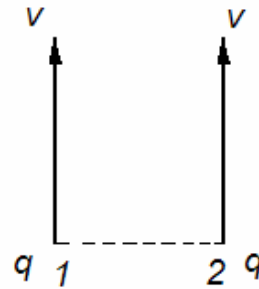


Рис. 9-2

Решение. Магнитная и электрическая силы определяются формулами: $F_m = qvB$ и $F_e = qE$, где v – скорость заряда 2, а B и E – индукция магнитного и напряженность электрического полей, создаваемых зарядом 1 в месте нахождения заряда 2. Отношение $F_m/F_e = vB/E$. В нашем случае $B = vE/c^2$, поэтому $F_m/F_e = (v/c)^2$. Из этого отношения следует, что даже для достаточно больших скоростей, например $v = 300$ км/с, это отношение равно 10^{-6} , т. е. магнитная часть силы в миллион раз меньше электрической и составляет ничтожную поправку к электрической силе. Полученное выражение справедливо и при релятивистских скоростях. Рассмотренный пример показывает, что магнитные силы, действующие на движущиеся заряды, пренебрежимо малы по сравнению с электрическими. Поэтому, стоит ли такие силы

изучать? Оказывается, ответ на этот вопрос положительный. И на это есть две причины.

Во-первых, если рассматривать пучки частиц, движущихся почти со световыми скоростями, то эта «поправка» к электрической силе становится сравнимой с последней.

Во-вторых, при движении, например, электронов вдоль проводов их направленная скорость при обычных плотностях составляет несколько десятых миллиметров в секунду, и отношение $(v/c)^2 \sim 10^{-24}$. Это ничтожная поправка к электрической силе! Но в данном случае магнитная сила – это практически вся действующая сила, ибо электрические силы исчезающе малы из-за почти идеального баланса отрицательных и положительных зарядов в проводах (эти заряды скомпенсированы!). Этот баланс отрицательных и положительных зарядов намного точнее чем 10^{-24} , и «ничтожная» магнитная сила оказывается, по существу, единственной, а участие громадного числа зарядов в создании тока компенсирует малость этого слагаемого. Другими словами, избыточные (нескомпенсированные) заряды на проводах ничтожно малы по сравнению с суммарным зарядом носителей тока. Поэтому магнитные силы в данном случае намного превосходят электрические силы, действующие на избыточные заряды проводов.

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции. Магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

9-2. Закон Био–Савара–Лапласа.

Рассмотрим задачу о нахождении магнитного поля, создаваемого постоянными электрическими токами. Эту задачу будем решать, исходя из закона (9-1), определяющего индукцию поля \vec{B} равномерно движущегося точечного заряда. Подставим в (9-1) вместо q заряд ρdV , где dV – элементарный объем, ρ – объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, и учтем, что $\rho \vec{v} = \vec{j}$. Тогда формула (9-1) приобретет следующий вид:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV. \quad (9-2)$$

Если же ток течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения dS , то $\vec{j}dV = I d\vec{l}$, где $I d\vec{l}$ – элемент длины провода. Векторы $\vec{j}dV$ и $I d\vec{l}$ называют соответственно объемным и линейным элементами тока. Произведя замену объемного элемента тока на линейный, получим и введя вектор $d\vec{l}$ в направлении тока I , перепишем предыдущее равенство в виде:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (9-3)$$

Формулы (9-2) и (9-3) выражают закон Био – Савара.

Полное поле \vec{B} в соответствии с принципом суперпозиции определяется в результате интегрирования выражений (9-2) или (9-3) по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_V \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Расчет по этим формулам индукции магнитного поля тока произвольной конфигурации достаточно сложен. Однако расчет значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию. Рассмотрим несколько простейших примеров нахождение индукции магнитного поля тока.

Пример 1. *Магнитное поле прямого тока*, т. е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (см. рис.9-3)

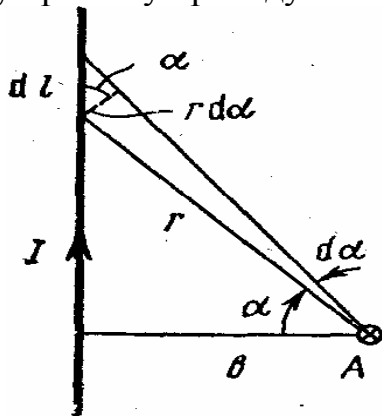


Рис. 9-3

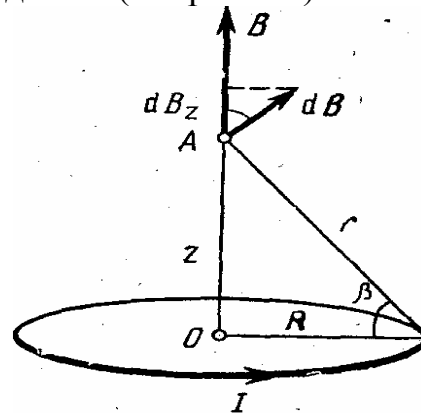


Рис. 9-4

Согласно (9-2), в произвольной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление – за плоскость рисун-

ка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB , причем

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Idl \cos \alpha}{r^2}.$$

Из рис. 9-3 видно, что $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = b/\cos \alpha$. Поэтому

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I \cos \alpha}{b}.$$

Интегрируя по α в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, получим:

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2I}{b}. \quad (9-4)$$

9-3. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле тороида и соленоида.

Магнитное поле обладает, как и электрическое поле, двумя важнейшими свойствами. Эти свойства, связанные также с потоком и циркуляцией векторного поля, и выражают основные законы магнитного поля. Как и любое другое векторное поле, поле \vec{B} может быть представлено наглядно в помощью линий вектора \vec{B} . Их проводят так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{B} , а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора \vec{B} в данном месте. Полученная таким образом геометрическая картина позволяет легко судить о конфигурации данного магнитного поля.

Циркуляция вектора \vec{B} по произвольному контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром L :

$$\oint_L B dl = \mu_0 I, \quad (9-5)$$

где $I = \sum I_k$, причем I_k — величины алгебраические. Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным. Это правило иллюстрируется на рис. 9-4. Здесь токи I_1 и I_3 положительные, так как их направления связаны с направлением обхода по контуру правилом правого винта, а

ток I_2 – отрицательный.

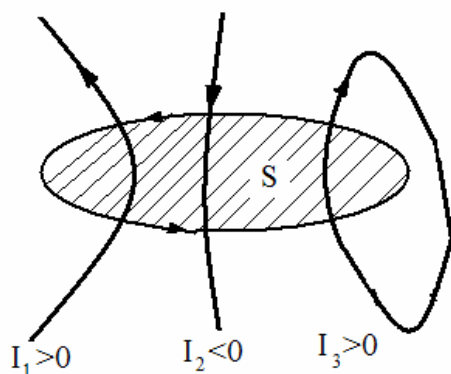


Рис. 9-4

Теорема о циркуляции (9-5) доказана экспериментально, однако, она также может быть доказана исходя из закона Био – Савара.

Тот факт, что циркуляция вектора \vec{B} не равна нулю, означает, что поле \vec{B} не потенциально (в отличие от электростатического поля). Такое поле называют вихревым или соленоидальным.

Так как циркуляция вектора \vec{B} пропорциональна току I , охватываемому контуром, то магнитному полю, в общем случае, нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с вектором \vec{B} соотношением, аналогичным $\vec{E} = -\text{grad}\phi$. Этот потенциал был бы неоднозначным, т. к. при каждом обходе по контуру и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное $\mu_0 I$. Теорема о циркуляции вектора \vec{B} играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса для векторов \vec{E} и \vec{D} . Мы знаем, что поле \vec{B} определяется всеми токами, циркуляция же вектора \vec{B} только теми токами, которые охватывает данный контур. Несмотря на это, в некоторых случаях теорема о циркуляции позволяет упростить вычисление индукции. В отдельных случаях вычисление циркуляции вектора \vec{B} можно свести, выбрав контур так, чтобы циркуляция равнялась произведению \vec{B} на длину контура или его часть. Если этого нет, расчет индукции \vec{B} придется проводить иными способами, например с помощью принципа суперпозиции и закона Био – Савара.

Рассмотрим несколько важных примеров, иллюстрирующих эффективность использования теоремы о циркуляции при расчете поля \vec{B} .

Пример 2. Магнитное поле прямого тока.

Пусть постоянный ток I течет вдоль бесконечно длинного прямого провода, имеющего круглое сечение радиусом a . Найти индукцию B поля снаружи и внутри провода.

Из симметрии задачи следует, что линии вектора \vec{B} в данном случае должны иметь вид окружностей с центром на оси провода. Причем модуль вектора \vec{B} должен быть одинаков во всех точках на расстоянии r от оси провода. Поэтому по теореме о циркуляции век

тора \vec{B} для круглого контура Γ_1 вне проводника (рис. 9-5): $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, откуда следует, что вне провода

$$B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{I}{r} (r > a).$$

Решение этой задачи с помощью закона Био – Савара оказывается гораздо более сложным. Внутри провода из тех же соображений симметрии следует, что линии вектора \vec{B} являются тоже окружностями. По теореме о циркуляции вектора \vec{B} для круглого контура Γ_2 (рис. 9-5): $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_r$, где $I_r = I (r/a)^2$ – ток, охватываемый данным контуром. Отсюда мы находим, что внутри провода

$$B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{Ir}{a^2} (r < a).$$

Если провод имеет вид трубки, то индукция снаружи определяется первой из формул, а внутри – магнитное поле отсутствует. Это также легко показать с помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{B} .

Пример 2. Магнитное поле соленоида.

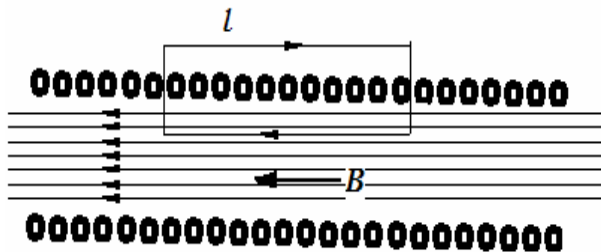


Рис.9-6

Пусть ток течет по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра (рис. 9-6). Такой обтекаемый ток цилиндр называют соленоидом. Пусть на единицу длины соленоида приходится n витков проводника.

Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым витком. Будем также предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток в соленоиде можно считать текущим по его поверхности. Опыт и расчет показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще.

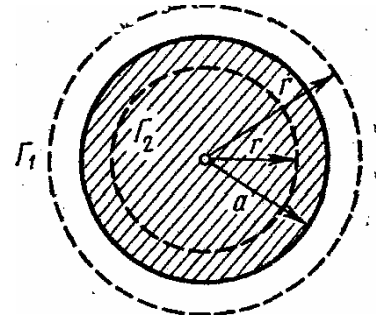


Рис.9-5

Из соображений симметрии ясно, что линии вектора \vec{B} внутри соленоида направлены вдоль его оси, причем вектор \vec{B} составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему. Выберем прямоугольный контур так, как показано на рис. 9-7. Циркуляция вектора \vec{B} по данному контуру равна Bl , а контур охватывает ток nIl . Согласно теореме о циркуляции $Bl = \mu_0 nIl$, откуда следует, что внутри длинного соленоида $B = \mu_0 nI$, т. е. поле внутри длинного соленоида однородно (за исключением областей, прилегающих к торцам соленоида, но этим при расчетах зачастую пренебрегают). Произведение nI называют числом ампер-витков. При $n = 2000$ витков/м $I = 2$ А магнитное поле внутри соленоида $B = 5$ мТл.

Пример 3. Магнитное поле тороида.

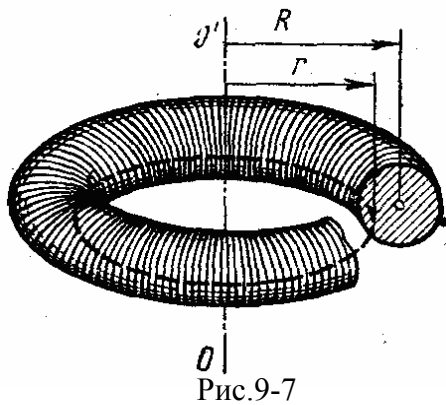


Рис.9-7

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 9-7). Из соображений симметрии нетрудно понять, что линии вектора \vec{B} должны быть окружностями, центры которых расположены на оси тороида. Поэтому ясно, что в качестве контура следует взять одну из таких окружностей. Если контур расположен внутри тороида, он охватывает ток NI , где N — число витков в тороидальной катушке; I — ток в проводе.

Пусть радиус контура r , тогда по теореме о циркуляции $B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, откуда следует, индукция магнитного поля внутри тороида:

$$B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{NI}{r}.$$

Из сравнения формул видно, что внутри тороида магнитное поле совпадает с полем прямого тока, текущего вдоль оси. Устремив и радиус тороида R к бесконечности (при неизменном сечении тороида), в пределе получим выражение для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

Если выбранный нами круглый контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает, поэтому для такого контура $B \cdot 2\pi r = 0$. Это значит, что вне тороида магнитное поле отсутствует.

9-4. Магнитный поток. Теорема Гаусса для потока индукции магнитного поля.

Поток вектора \vec{B} через площадку dS равен (рис. 9-8):

$$d\Phi = (\vec{B} \cdot \vec{n})dS. \quad (9-6)$$

Поток вектора \vec{B} сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Эта теорема является обобщением опытных данных. Она выражает собой тот экспериментальный факт, что линии вектора \vec{B} не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий вектора \vec{B} , выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Поэтому, поток вектора \vec{B} сквозь поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности S . Это легко понять с помощью представления о линиях вектора \vec{B} : т. к. они нигде не прерываются, их число сквозь поверхность S , ограниченную данным контуром (т. е. поток вектора \vec{B}), действительно не должно зависеть от формы поверхности S .

Закон выражает также и тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора \vec{B} . Иначе говоря, магнитное поле не имеет источников в противоположность полю электрическому.

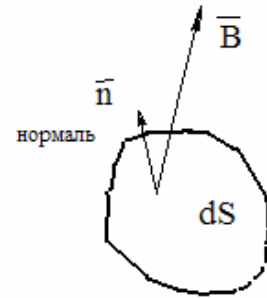


Рис.9-8

ЛЕКЦИЯ 10

ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ

10-1. Взаимодействие проводников с током. Сила Ампера.

10-2. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле.

10-3. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током.

10-4. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.

10-5. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

10-6. Потенциальная энергия контура с током во внешнем магнитном поле.

10-1. Взаимодействие проводников с током. Сила Ампера

Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передается проводнику, по которому заряды движутся. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током. Найдем эту силу.

Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока (электроны в металле, например) равна ρ . Выделим мысленно элемент объема dV проводника. В нем находится заряд – носитель тока, равный ρdV . Тогда сила, действующая на элемент dV проводника, может быть записана в виде:

$$d\vec{F} = \rho \vec{u} \times \vec{B} dV. \quad (10-1)$$

Так как $\vec{j} = \rho \vec{u}$, то:

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dV. \quad (10-2)$$

Если ток течет по тонкому проводнику, то $\vec{j} dV = Id\vec{l}$ и

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}, \quad (10-3)$$

где $d\vec{l}$ – вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника.

Формула (10-3) выражает закон Ампера. Интегрируя эти выра-

жения по элементам тока (объемным или линейным), можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной объем проводника, или на его линейный участок.

Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют силами Ампера.

Пример. Сила взаимодействия параллельных токов.

Найти силу, с которой взаимодействуют в вакууме два параллельных бесконечно длинных провода с токами I_1 и I_2 , если расстояние между проводами равно b . Расчет силы произведем на единицу длины этой системы.

Решение. Каждый элемент тока I_2 находится в магнитном поле тока I_1 , равном $B_1 = (\mu_0/4\pi) 2I_1/b$. Угол между элементом тока I_2 и вектором B_1 прямой, поэтому, на единицу длины проводника с током I_2 действует сила $F = I_2 B_1 = (\mu_0/4\pi) 2I_1 I_2/b$. Для силы, действующей на единицу длины проводника с током I_1 получается, такое же выражение.

Можно показать, пользуясь определением векторного произведения и формулой (10-3), что токи, одинаково направленные, притягиваются, а противоположно направленные – отталкиваются. Здесь речь идет только о магнитной силе. Не следует, однако, забывать, что кроме магнитной имеется еще и электрическая сила, т. е. сила, обусловленная избыточными зарядами на поверхности проводников. Поэтому, если говорить о полной силе взаимодействия между проводами, то она может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания – все зависит от соотношения магнитной и электрической составляющих полной силы.

10-2. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле.

Когда контур с током находится во внешнем магнитном поле мы будем предполагать, что оно постоянное, т. е. на отдельные элементы контура действуют амперовы силы, а поэтому при перемещении контура эти силы будут совершать работу. Покажем, что работа, которую совершают амперовы силы при элементарном перемещении контура с током I , определяется по формуле:

$$\delta A = Id\Phi, \quad (10-4)$$

где ($d\Phi$ – приращение магнитного потока через контур при данном перемещении).

Сначала рассмотрим частный случай: контур с подвижной пе-

ремычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка (рис. 10-1). На перемычку действует сила ампера $F = IB$. При перемещении перемычки вправо на dx эта сила совершает положительную работу: $\delta A = Fdx = IBldx = IBdS$, где dS – приращение площади, ограниченной контуром.

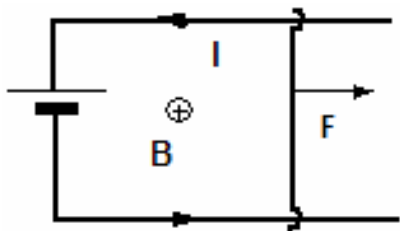
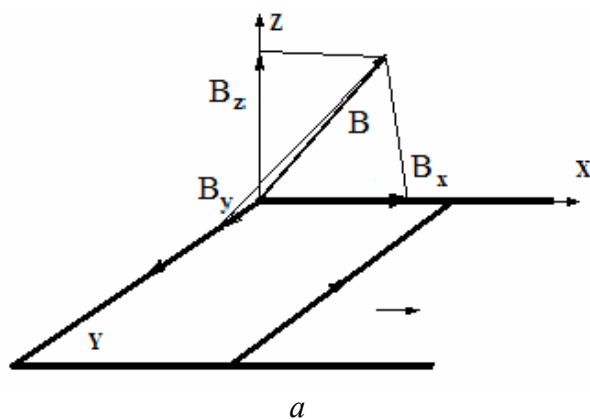


Рис.10-1

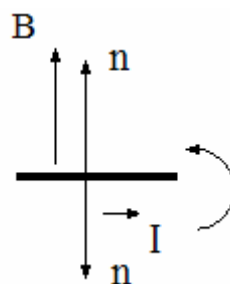
Для определения знака магнитного потока Φ условимся всегда брать нормаль к поверхности, ограниченной контуром, так, чтобы она образовывала с направлением тока в контуре правовинтовую систему (т. е. при вращении рукоятки воображаемого винта по часовой

стрелке направление его завинчивания совпадает с направлением нормали). При этом ток I будет всегда величиной положительной. Поток же Φ может быть как положительным, так и отрицательным. Но в нашем случае как Φ , так и $d\Phi = BdS$ являются величинами положительными (если бы поле B было направлено на нас или перемычка перемещалась бы влево, то в обоих случаях $d\Phi < 0$).

Полученный, результат справедлив и для произвольного направления поля \vec{B} . Чтобы убедиться в этом, разложим вектор \vec{B} на три составляющие: $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$ (см. рис. 10-2, а).



а



б

Рис.10-2

Составляющая B_y – вдоль перемычки – параллельна току в ней и поэтому не оказывает на перемычку силового действия. Составляющая B_x – вдоль перемещения – дает силу, перпендикулярную переме-

щению, работы она не совершает. Остается лишь составляющая B_z – перпендикулярная плоскости, в которой перемещается перемычка. Поэтому в формуле вместо B надо брать только B_z . Но $B_z dS = d\Phi$, и мы опять получаем записанную выше формулу.

Теперь перейдем к рассмотрению любого контура при произвольном перемещении его в постоянном неоднородном магнитном поле (контур может при этом и произвольно деформироваться). Разобьем мысленно данный контур на бесконечно малые элементы тока и рассмотрим их бесконечно малые перемещения. В этих условиях магнитное поле, в котором перемещается каждый элемент тока, можно считать однородным. Для такого перемещения к каждому элементу тока применимо выражение $\delta A = Id\Phi$ для элементарной работы, где под $d\Phi$ надо понимать вклад в приращение потока через контур от данного элемента контура. Сложив такие элементарные работы для всех элементов контура, снова получим записанное выше выражение (10-4), где $d\Phi$ есть приращение магнитного потока через весь контур. Чтобы найти работу сил Ампера при полном перемещении контура с током от начального положения 1 до конечного 2, достаточно проинтегрировать выражение (10-4):

$$A = \int_1^2 Id\Phi. \quad (10-4, a)$$

Если при этом перемещении поддерживать ток I постоянным, то

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (10-5)$$

где Φ_2 и Φ_1 – магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях. Таким образом, работа сил Ампера в этом случае равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через контур. Выражение (10-5) дает не только величину, но и знак совершаемой работы.

Пример. Работа при повороте плоского контура в магнитном поле.

Плоский контур с током I поворачивают в магнитном поле из положения, при котором нормаль к контуру \vec{n} антипараллельна \vec{B} (см. рис. 10-2, б), в положение, при котором \vec{n} параллельна \vec{B} (направление нормали связано с направлением тока правилом правого винта). Площадь, ограниченная контуром, равна S . Найти работу сил Ампера при указанном перемещении, считая, что ток I поддерживает-

ся постоянным.

Решение. Согласно (10-5) $A = I[BS - (-BS)] = 2BS$. В данном случае работа $A > 0$, при обратном же повороте $A < 0$. Следует отметить, что работа совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля (оно не меняется), а за счет источника ЭДС поддерживающего ток в контуре.

10-3. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током.

Результирующая сила Ампера, которая действует на контур с током в магнитном поле, определяется интегрированием (10-3) по всему контуру с током I :

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (10-6)$$

Если магнитное поле однородно, то вектор \vec{B} можно вынести из-под интеграла и задача сводится к вычислению векторного интеграла $\oint d\vec{l}$. Этот интеграл представляет собой сумму элементарных векторов $d\vec{l}$, на которые разбит контур. Так как длина вектора, соединяющего начало первого и окончание последнего из элементарных векторов, на которые разбит контур, равна нулю, то и весь интеграл равен нулю. Значит, и результирующая сила Ампера, действующая на весь контур в целом, равна нулю в однородном магнитном поле. В самом деле:

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I(\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0, \quad (10-7)$$

так как интеграл $\oint d\vec{l}$, взятый по замкнутому контуру, равен нулю.

Если же магнитное поле неоднородно, то результирующая сила отлична от нуля и в каждом конкретном случае она определяется с помощью выражения (10-7). В неоднородном поле контур с током может перемещаться.

Практический интерес представляет случай, когда контур с током плоский и его размеры настолько малы, что магнитное поле в пределах площади, охватываемой контуром, можно считать однородным. Такой контур с током называют элементарным. Поведение элементарного контура с током в магнитном поле удобно описывать с помощью магнитного момента p_m . Магнитный момент определяется следующим образом:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (10-8)$$

где I – ток; S – площадь, ограниченная контуром; \vec{n} – нормаль к контуру. Направление нормали связано с направлением тока в контуре правилом правого винта.

10-4. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.

Контур с током в однородном магнитном поле может совершать движение только относительно собственного центра масс, например, совершать вращение. Способность магнитного поля поворачивать контур с током (например, рамку с током) широко используется в процессе конструирования и создания различных электромагнитных приборов, а также электродвигателей.

Найдем теперь механические силы, действующие на замкнутый контур с током в магнитном поле. Положим сначала, что контур имеет форму прямоугольной рамки (рис. 10-3) и магнитное поле однородно. Силы, действующие на ребра a , перпендикулярны к ним и к магнитной индукции и поэтому стремятся только растянуть (или сжать) виток. Силы, действующие на ребра b , стремятся повернуть виток так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна к направлению индукции \vec{B} . Следовательно, на виток действует пара сил с некоторым моментом \vec{M} . Это справедливо, очевидно, не только для прямоугольной рамки, но и для контура произвольной формы

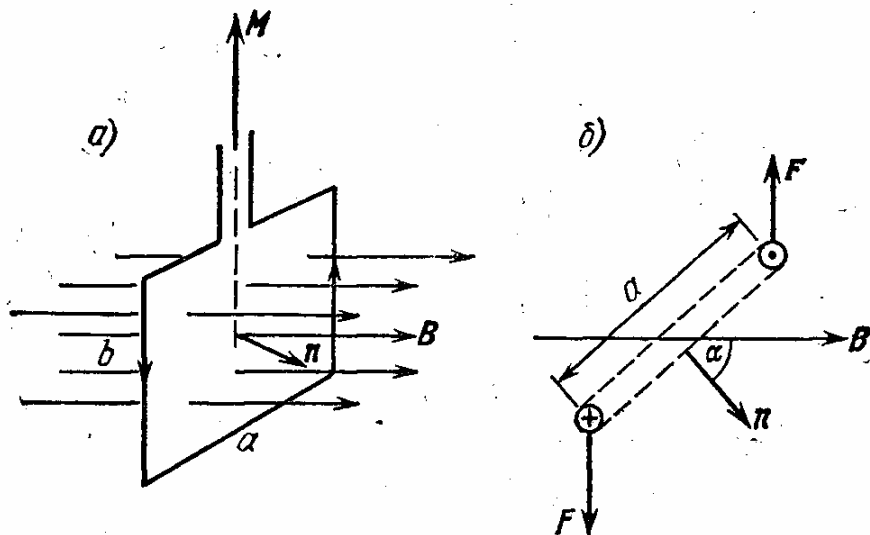


Рис.10-3

Представим, что контур повернулся под действием сил поля на бесконечно малый угол $d\alpha$. Силу тока в контуре I , а следовательно, и

магнитный момент $p=IS$, будем считать постоянными. Тогда механическая работа сил поля будет равна $\delta A = Md\alpha$. С другой стороны, магнитный поток, пронизывающий контур, равен $\Phi = SB \cos\alpha$, а его изменение при уменьшении угла α на $d\alpha$ равно $d\Phi = SB \sin\alpha d\alpha$. Пользуясь известной формулой $\delta A = Id\Phi$, получим:

$$Md\alpha = ISB \sin\alpha d\alpha.$$

Отсюда выразим M :

$$M = ISB \sin\alpha = pB \sin\alpha.$$

Полученный результат можно выразить векторной формулой, дающей и модуль, и направление момента пары сил:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (10-9)$$

Магнитное поле стремится повернуть контур с током так, чтобы его магнитный момент \vec{p} расположился в направлении вектора \vec{B} . При таком расположении контура его потенциальная энергия минимальна и контур находится в состоянии устойчивого равновесия.

10-5. Контур с током в неоднородном магнитном поле

Если контур находится в неоднородном магнитном поле, то действие сил Ампера не сводится к возникновению только вращающего момента. Из рис. 10-3 видно, что на контур с магнитным моментом \vec{p}_m , сориентированным вдоль силовых линий поля, действует отличная от нуля сила, равная $\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$, тогда как вращающий момент в таком положении контура с током равен нулю. На элементы контура, перпендикулярные к плоскости рисунка, действуют силы, которые определяются параллельными составляющими магнитной индукции в точках P и N контура.

Силы, определяемые перпендикулярными составляющими поля, стремятся растянуть контур, и на рисунке не показаны. Применяя правило правого винта, легко видеть, что если магнитный момент \vec{p}_m параллелен магнитной индукции (как изображено на рисунке), то виток будет втягиваться в область более сильного поля. Если же вектор \vec{p}_m антипараллелен индукции, то виток будет выталкиваться и перемещаться в область более слабого поля. Найдем эту силу. Для этого положим, что виток смещается в направлении \vec{p}_m на малый отрезок dx .

Тогда механическая работа $\delta A = Fdx$. Изменение магнитного потока равно

$$d\Phi = S \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right) dx, \quad (10-11)$$

где B_n — составляющая магнитной индукции, нормальная к плоскости витка.

Применяя (10-11), получим выражение для работы сил магнитного поля:

$$\delta A = Fdx = Id\Phi = IS \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right) dx.$$

Из последнего равенства следует:

$$F = p_m \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right). \quad (10-12)$$

Сила, действующая на малый виток с током в магнитном поле, пропорциональна скорости изменения магнитной индукции в рассматриваемом направлении.

Найдем общее выражение для силы при произвольной ориентации малого контура с током относительно магнитной индукции. Если p_{mx} , p_{my} и p_{mz} — составляющие магнитного момента контура с током в прямоугольных осях координат, а B_x , B_y и B_z — составляющие магнитной индукции, то сила в направлении оси x выражается формулой:

$$F_x = p_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B_x}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial z}. \quad (10-13)$$

Для составляющих силы F_y и F_z справедливы аналогичные формулы. Эти результаты можно записать в виде векторной формулы:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \text{grad}) \vec{B}. \quad (10-14)$$

где введен дифференциальный оператор:

$$\vec{p}_m \text{grad} = p_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial}{\partial z}.$$

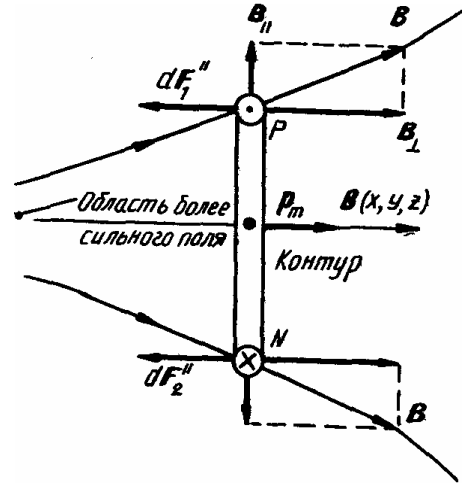


Рис.10-5

В общем случае неоднородного поля, не перпендикулярного к плоскости витка, будут действовать и пара сил, стремящихся повернуть виток, и сила, вызывающая поступательное перемещение.

Силу, действующую на контур с током конечных размеров, можно найти, разбивая площадь S , ограниченную этим контуром, на элементы dS , обтекаемые током той же силы и в том же направлении, что и в ограничивающем контуре. Полная сила есть сумма сил, действующих на отдельные элементы с магнитными моментами IdS .

Из формулы (10-12) видно, что:

- 1) в однородном магнитном поле $\vec{F} = 0$, так как $\partial B / \partial x = 0$;
- 2) направление вектора \vec{F} вообще говоря, не совпадает ни с вектором \vec{B} , ни с вектором \vec{p}_m ; вектор \vec{F} совпадает лишь с направлением элементарного приращения вектора \vec{B} , взятого в направлении вектора \vec{p}_m в месте расположения контура.

Если нас интересует проекция силы \vec{F} на некоторое направление x , то достаточно записать это выражение в проекциях на это направление, и мы получим: $F = p_m (\partial B / \partial x)$, где $\partial B / \partial x$ – производная соответствующей проекции вектора \vec{B} опять же по направлению нормали к контуру

10-6. Потенциальная энергия контура с током во внешнем магнитном поле

Силы магнитного поля стремятся расположить контур так, чтобы его магнитный момент \vec{p}_m был параллелен вектору \vec{B} (в этом положении вращающий момент $\vec{M} = 0$). Для того чтобы увеличить угол β между векторами \vec{p}_m и \vec{B} на $d\beta$, нужно совершить работу против сил поля, равную:

$$dA = Md\beta = p_m B \sin\beta d\beta.$$

Поворачиваясь на угол $d\beta$ при возвращении в исходное положение, контур с током может совершить такую же работу над какой-либо механической системой (телом). Следовательно, работа равна убыли потенциальной энергии $\Pi(\beta)$, которой обладает контур с током в магнитном поле B , т. е. $d\Pi = -p_m B \sin\beta d\beta$. Проинтегрировав это выражение по β пределах от β до $\pi/2$ и выбирая нулевой уровень энергии при $\beta = \pi/2$, получим:

$$\Pi = \int_{\beta}^{\pi/2} p_m \sin\beta d\beta = -p_m B \cos\beta = \vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (10-15)$$

Согласно выражению (10–15) потенциальная энергия контура с током в магнитном поле равна скалярному произведению \vec{p}_m и \vec{B} , взятому с обратным знаком. Как известно, положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии, который достигается при параллельной ориентации векторов \vec{p}_m и \vec{B} . Противоположная ориентация отвечает неустойчивому равновесию контура. Заметим, что потенциальная энергия, определяемая формулой (10–15), представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая связана с действием вращательного момента. Работа сил поля при поступательном движении контура в магнитном поле в общем случае не может быть выражена через потенциальную энергию, поскольку магнитное поле вихревое, а не потенциальное.

ЛЕКЦИЯ 11

ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ И ДВИЖУЩИЙСЯ ЗАРЯД

11-1. Сила Лоренца. Уравнения движения заряженной частицы в магнитном и электрическом полях.

11-2. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц, масс-спектрометров.

11-3. Эффект Холла и его применение в современных исследованиях. МГД-генератор.

11-1. Сила Лоренца. Уравнения движения заряженной частицы в магнитном и электрическом полях

Электрический ток есть движение заряженных частиц (электронов или ионов), поэтому на движущийся заряд в магнитном поле действует сила. На проводник длины l с током i в магнитном поле действует сила $IlB\sin\alpha$, где B – магнитная индукция, α – угол между магнитной индукцией и направлением тока. С другой стороны $Il = Nq\upsilon$, где N – полное число движущихся заряженных частиц внутри проводника. Учитывая, что направление тока совпадает с направлением скорости υ движения положительных частиц, мы можем выражение для силы представить в виде $Nq\upsilon B\sin\alpha$. Сила, действующая на проводник, пропорциональна полному числу движущихся частиц. Поэтому, сила, действующая на одну частицу, равна

$$F = q\upsilon B\sin\alpha. \quad (11-1)$$

Направление этой силы перпендикулярно к направлению скорости υ и магнитной индукции \vec{B} и подчиняется правилу правого винта. Силу можно выразить в виде векторной формулы:

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}. \quad (11-2)$$

Если имеется еще электрическое поле, то полная сила равна:

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} + q\vec{E}. \quad (11-3)$$

Выражение (11-3) было впервые получено из опыта Г. Лоренцем, и поэтому силу, действующую на движущийся заряд, называют *силой Лоренца*. Формулу (11-3) мы получили, анализируя опытные данные о взаимодействии неподвижного проводника с током. Поэтому, скорость, вхо-

дующая в (11-3), есть скорость относительно магнитного поля. Выражение (11-3) является универсальным, так как оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей, причем при любых значениях скорости v заряда, т. е. является релятивистски инвариантным. По действию силы Лоренца на заряд можно определить модули и направления векторов \vec{E} и \vec{B} . Поэтому, выражение для силы Лоренца следует также рассматривать как определение электрического и магнитного полей. Знак заряда определяет направление силы, а следовательно, и направление движения заряженной частицы. Следует подчеркнуть, что на покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического.

Сила Лоренца проявляется при движении электронов, ионов и других заряженных частиц в магнитных полях. Зная параметры траектории движения этих частиц в магнитном поле, можно определить такие важные параметры, как удельный заряд частицы (отношение заряда к массе), а также ее импульс и энергию. Закономерности движения заряженных частиц в магнитном поле положены в основу циклических ускорителей и масс-спектрометров.

11-2. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц, масс-спектрометров

Найдем траекторию движения частицы, влетающей со скоростью v в постоянное магнитное поле перпендикулярно к направлению магнитной индукции (см. рис. 11-1, где направление магнитной силы F_m соответствует положительно заряженной частице).

Так как $\sin\alpha = 1$, то согласно (11-1) сила $F_m = qvB$. Так как сила F_m перпендикулярна направлению движения, то работы она не совершает и по закону изменения кинетической энергии скорость частицы по модулю остается постоянной. Это означает, что тангенциальная составляющая ускорения равна нулю, а сила F_m создает только нормальное ускорение, т. е. скорость частицы меняется только по направлению. Согласно второму закону динамики $ma_n = mv^2/r = F_m = qvB$, где m – масса частицы, a_n – нормальное ускорение частицы, r – радиус кривизны и траектории. Из этого равенства следует, что частица движется по окружности с радиусом:

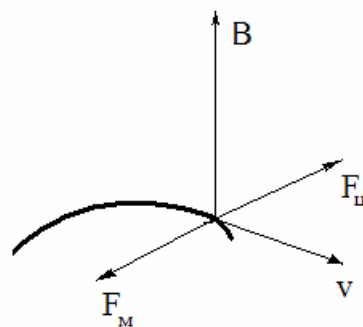


Рис.11-1

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (11-4)$$

Из формулы (11-4) видно, что радиус траектории зависит от удельного заряда частицы, магнитной индукции и скорости движения частицы. Такая закономерность положена в основу работы циклических ускорителей заряженных частиц и масс-спектрометров. Одним из таких ускорителей является циклотрон. В циклотроне ионы многократно ускоряются переменным электрическим полем. Камера циклотрона, в которой происходит ускорение, помещена в магнитном поле. В магнитном поле ионы будут двигаться по окружности, причем радиус окружности тем больше, чем больше скорость ионов. Поскольку скорость ионов в процессе ускорения увеличивается, в камере циклотрона они будут двигаться не по окружности, а по спирали. Внутри камеры циклотрона (рис. 11-2: 1 – дуанты, 2 – траектория иона, 3 – мишень, 4 – переменная разность потенциалов, 5 – вакуумная камера, 6 – ускоряющий промежуток) расположены два электрода – дуанты, выполненные в виде полуцилиндров и разделенные зазором по диаметру камеры. К дуантам прикладывается переменное напряжение. В камере поддерживается высокий вакуум (около 10^{-9} атм.). Выходя из расположенного в центре камеры ионного источника, положительные ионы устремляются к дуанту, заряженному в этот момент отрицательно. Попадая внутрь дуанта, ионы закручиваются магнитным полем и вновь выходят в зазор.

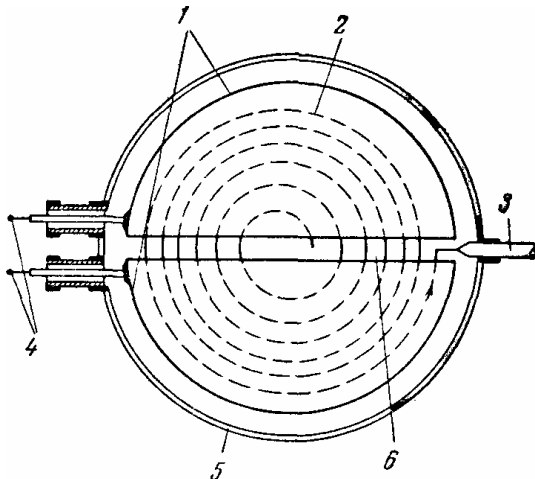


Рис.11-2

Если знак приложенного к дуантам электрического напряжения изменится к этому времени на противоположный, то энергия ионов вновь возрастет и соответственно увеличится радиус обращения.

Период обращения иона с зарядом $q = Ze$ (Z – зарядовое число, e – элементарный заряд) равен:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{ZeB}. \quad (11-5)$$

Из формулы (11-5) вытекает, что для ионов с данной массой m и

зарядом Ze период обращения не зависит ни от радиуса обращения иона, ни от его энергии. Поэтому если магнитное поле постоянно, то в процессе ускорения ион будет попадать в зазор через одинаковые промежутки времени. Это и позволяет осуществить процесс многократного ускорения, приложив к дуантам переменное электрическое напряжение с частотой: $f = 2\pi/T$. Поскольку частота обращения ионов будет совпадать с частотой колебаний напряжения на дуантах, то при каждом прохождении зазора должна возрасти энергия ионов. За один оборот энергия частицы увеличивается всего на несколько десятков КэВ. Однако в процессе ускорения частицы совершают сотни оборотов, поэтому величина их энергии достигает в итоге нескольких МэВ. При этом величина токов достигает нескольких сотен микроампер или даже миллиампер. Максимальная энергия протонов и дейтронов, ускоренных на циклотроне, достигает 20 МэВ. Поток частиц, ускоренных циклотроном, является импульсным – ускорение частиц происходит лишь во второй четверти периода изменения электрического поля. Размеры циклотронов весьма значительны: так, например, циклотрон, дающий протоны с энергией 10 МэВ имеет магнит весом в 200 т, диаметр полюсов – 1,5 м. Но все же эти установки менее громоздки, чем высоковольтные ускорители.

Циклотрон оказался чрезвычайно удобным прибором для ускорения протонов, дейтронов и α -частиц до энергий в несколько десятков МэВ. Однако для ускорения частиц до еще больших энергий – порядка сотен МэВ – циклотрон непригоден. При таких энергиях нарушается основное условие ускорения частиц в циклотроне – условие постоянства периода обращения ускоряемых ионов на разных стадиях ускорения. Дело в том, что масса частицы, постоянной не является, а зависит от скорости. При энергии протона в 10 МэВ отношение $v/c = 0,15$, и релятивистская поправка к величине массы покоящегося протона мала. Но при энергии в 100 МэВ отношение достигает 0,45 и по мере дальнейшего ускорения масса протона будет заметно возрастать, а следовательно, будет возрастать и период обращения его в циклотроне. В результате при заданной частоте изменения электрического поля частицы начинают запаздывать к выходу в зазор. В конце концов это приведет к тому, что электрическое поле будет оказывать уже не ускоряющее, а тормозящее действие. Этот недостаток циклотрона можно устранить, если по мере роста скорости частицы синхронно увеличивать период напряжения, приложенного к дуантам. Ускоритель, в котором увеличивается период электрического напряжения, называется *синхроциклотроном* или *фазотроном*.

Наиболее мощным ускорителем заряженных частиц является синхрофазотрон. В нем частицы разгоняются не по спирали, а по окружности постоянного радиуса. Для этого необходимо синхронно изменять напряженность магнитного поля и период электрического напряжения. В синхрофазотроне, построенном в г. Дубне, протоны разгоняются до энергии 10 МэВ. Диаметр кольцевого магнита этого синхрофазотрона равен 56 м.

В магнитных масс-спектрометрах магнитное поле играет роль призмы, разлагающей пучок ионов на отдельные составные части в зависимости от энергии частиц (рис. 11-4). Однако преломление света происходит тем сильнее, чем меньше длина волны (т. е. искривление же траектории в магнитном поле тем сильнее, чем меньше чем выше частота и энергия световых квантов); импульс (и энергия) заряженных частиц. Радиус кривизны траектории r пропорционален импульсу частицы (т. е. при данной скорости пропорционален ее массе) и обратно пропорционален заряду (см. формулу 11-4). Поэтому, при прочих равных условиях сильнее будут закручиваться более легкие частицы, слабее – более тяжелые. Таким образом, частицы можно в пространстве разделить по массе, т. е. получить массовый спектр. В реальной конструкции масс-спектрометра ионы образуются путем облучения потока нейтральных частиц (которые получают, например, в результате химической или ядерной реакции, продукты которой следует изучить) пучком электронов.

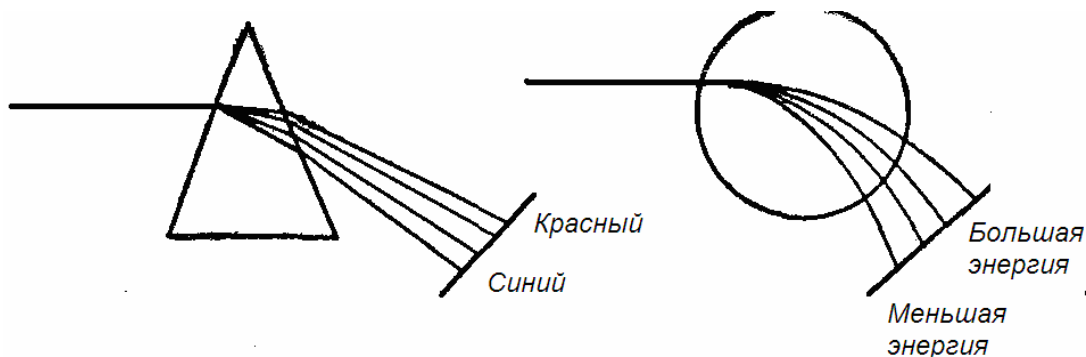


Рис.11-4

Регистрация массового спектра обеспечивается либо с помощью фотопластинок (такие приборы получили название масс-спектрографов), либо измерением электрического тока детектора заряженных частиц. Масс-спектрометры обладают высокой чувствительностью, с их помощью было впервые установлено существование изотопов химических элементов.

11-3. Эффект Холла и его применение в современных исследованиях. МГД – генератор

Когда металлическая пластинка, вдоль которой течет постоянный ток, помещена в магнитное поле, перпендикулярное к пластинке, то на боковых гранях (параллельных полю и току) возникает разность потенциалов $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$. Это классический эффект Холла (Эдвин Герберт Холл, американский физик, 1855–1938). Сила Лоренца, равная: $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$ (e – заряд электрона), смещает электроны металла к грани перпендикулярной к оси y . В результате электронейтральность в объеме образца нарушается, – около одной из граней сосредотачивается избыточный отрицательный заряд электронов, около другой – нескомпенсированный заряд ионов в узлах кристаллической решетки.

В результате возникает электрическое поле, которое направлено по оси y (рис.11-5). Заряды будут смещаться, пока не накопятся на гранях, перпендикулярных оси y , создав электрическое поле, препятствующее смещению зарядов. Сила, действующая на заряды со стороны электрического поля \vec{E} , должна быть равна магнитной силе Лоренца:

$$e\vec{E} = e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (11-6)$$

Движущиеся положительные и отрицательные заряды смещаются в одну сторону. На рис. 11-6 показано направление тока и соответствующее направление движения положительного и отрицательного зарядов (индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости рисунка и направлена на нас):

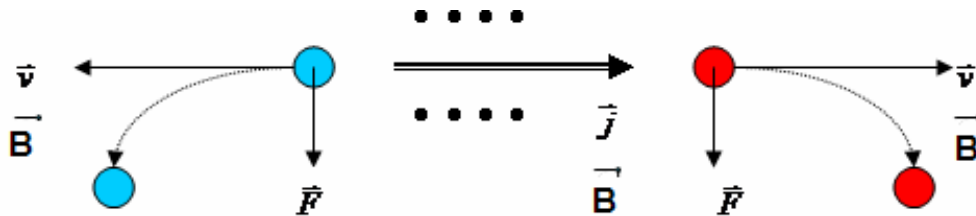


Рис.11-6

Итак, возникает электрическое поле, равное:

$$E_y = -v_x B_z. \quad (11-7)$$

Скорость движения зарядов найдем из выражения для плотности тока $j_x = env_x$:

$$v_x = \frac{j}{en}. \quad (11-8)$$

Из выражений (11-7) и (11-8) получим выражение для электрического поля Холла:

$$E_y = \frac{j_x B_z}{ne}. \quad (11-9)$$

Из (11-9) следует, что величина:

$$R = \frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{ne}. \quad (11-10)$$

зависит от концентрации и заряда носителей и является характеристикой данного проводника. Эта величина называется *постоянной Холла*. Разность потенциалов на обкладках по оси y (в силу того, что электрическое поле однородное) называется *Холловской разностью потенциалов*, которая с учетом (11-10) примет вид:

$$U_H = E_y d = R j_x B_z d. \quad (11-11)$$

В опытах и наблюдается возникновение этой разности потенциалов в проводнике (или полупроводнике), помещенном в поперечное магнитное поле. Это по сути дела и есть эффект Холла. Эксперимент Холла позволяет определить знак носителей заряда. Смена знака носителей заряда ведет к смене направления E_y и, соответственно, к смене знака зарядов на стенках образца. Измеряя постоянную Холла, можно найти знак и концентрацию носителей заряда. Было подтверждено, что в металлах носителями являются электроны. В полупроводниках бывает, что проводимость обеспечивается положительными носителями – *дырками*.

Для характеристики переноса заряда в веществе вводят понятие подвижности

$$\mu = v/E, \quad (11-12)$$

где v – скорость носителей; E – электрическое поле вдоль тока (в отличие от E_y). Тогда можно записать соотношение, связывающее постоянную Холла, проводимость и подвижность:

$$\frac{j}{E} = \sigma = ne \frac{v}{E} = ne\mu, \quad R\sigma = \mu. \quad (11-13)$$

Эффект Холла широко используется для определения знака заряда носителей тока, их концентрации и подвижности (используя, например, формулы (11-13)). Известно, что подвижность зависит от температуры по закону $\mu = A \exp(-U_A/kT)$, где U_A – энергия активации носителей заряда, которая является важным параметром вещества (проводника или полупроводника). Энергия активации определяет структуру энергетических уровней (так называемых энергетических зон). Поэтому, определив U_A из зависимости подвижности от температуры, можно получить сведения о структуре энергетических уровней вещества и данные об энергетическом спектре носителей заряда.

Практические применения эффекта Холла – измерение магнитных полей, датчики в магнитоуправляемых микросхемах, элементах памяти, датчики числа оборотов коленвала в ДВС.

На движении заряженных частиц в магнитном поле основано действие магнито-гидродинамического генератора (МГД-генератора), установки для получения электрической энергии. Газ, предварительно нагретый до высокой температуры (порядка 2800 К) и потому сильно ионизированный, продувают через канал поперек постоянного магнитного поля. Под действием лоренцевой силы положительные и отрицательные газовые ионы движутся в противоположные стороны (поперек газового потока) и, достигая электродов и сообщают им противоположные электрические заряды. С этих электродов во внешнюю цепь отводится электрический ток. МГД-генератор. Рассматривался как перспективное средство получения электрической энергии, так как:

1. превращает тепло в электрическую энергию непосредственно, без механического преобразования (и, следовательно, не имеет движущихся деталей).

2. благодаря очень высокой температуре рабочего вещества (газа) он обладает повышенным коэффициентом полезного действия.

ЛЕКЦИЯ 12

ВЕЩЕСТВО В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ДИАМАГНЕТИКИ

12-1. Магнитные моменты атомов. Орбитальный и спиновый моменты атома.

12-2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества.

12-3. Элементарная теория диамагнетизма.

12-1. Магнитные моменты атомов. Орбитальный и спиновый моменты атома

До сих пор мы рассматривали магнитные поля и токи в вакууме. В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и движениями зарядов внутри атомов и молекул. Магнетизм вещества проявляется при помещении его во внешнее магнитное поле, одни вещества выталкиваются в область более сильного поля, другие, наоборот, втягиваются в эту область.

Ампер выдвинул гипотезу: в веществе циркулируют замкнутые токи. Каждый замкнутый ток представляет собой магнитный момент и создает магнитное поле вокруг себя. Без внешнего поля они ориентированы беспорядочно и полное поле от них равно нулю. Под влиянием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию. Отсюда суммарный магнитный момент образца не равен нулю, магнетик намагничивается и появляется внутреннее поле \vec{B} .

Магнетизм вещества обусловлен тремя основными причинами.

1. *Орбитальное движение электронов.* Состояния электронов в атомах описываются квантовыми числами (n, l, m, μ). Механический момент (момент импульса) орбитального движения электрона L квантован, т. е. принимает дискретные значения $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. В достаточно сильном внешнем магнитном поле плоскость орбиты электрона в атоме наклоняется относительно направления индукции магнитного поля (рис. 12-1). При этом проекция механического момента на направление магнитной индукции также квантуется и равна $L_z = m_h \hbar$, где m_h – магнитное квантовое число ($m_h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\hbar = h/2\pi$ – при-

веденная постоянная Планка. Магнитный момент от орбитального движения:

$$\mu = m_h \frac{eh}{2m_e} = m_h \mu_B. \quad (12-1)$$

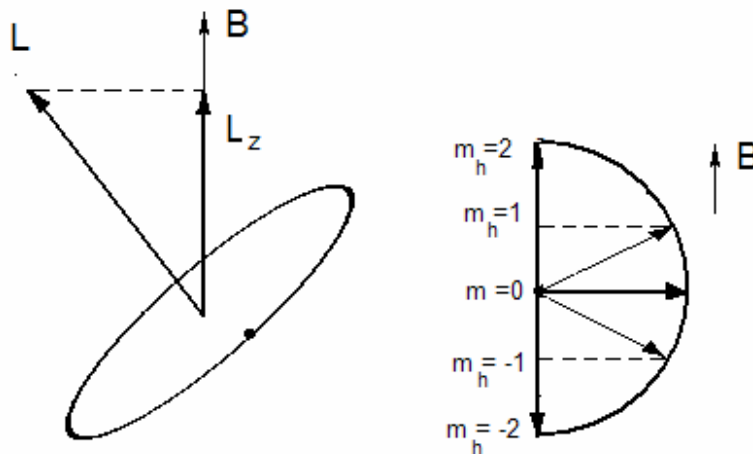


Рис.12-1

В формуле (12-1) – m_e – масса электрона, m_h – магнитное квантовое число ($m_h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\mu_B = e\hbar/2m_e = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ Ам}^2$ – магнетон Бора (магнетон Бора – это магнитный момент электрона, вращающегося по первой, самой близкой к ядру, орбите в атоме водорода). В зависимости от состояния электрон обладает разными m и, соответственно, разными магнитными моментами, кратными магнетону Бора μ_B . Для описания магнитных свойств атомов вещества вводится отношение магнитного момента к механическому, которое называется *гиромагнитным* (или *магнитомеханическим*) отношением:

$$\frac{P_m}{L_z} = \frac{e}{2m_e}. \quad (12-2)$$

Спин электронов – *собственный механический* момент частицы. Ему соответствует магнитный момент с проекцией $\mu = \pm \mu_B$.

2) *Спин ядер*. Поскольку ядра состоят из протонов и нейтронов, обладающих собственными магнитными моментами, то ядра также обладают магнитными моментами. В обычных условиях вклад ядерного магнетизма в общую картину магнитных свойств мал. Подход к рассмотрению магнитных свойств вещества, в котором пренебрегают ядерным магнетизмом, называется *адиабатическим приближением*.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что все вещества являются магнетиками, т. е. при внесении во внешнее магнитное поле сами становятся источниками дополнительного магнитного поля – намагничиваются. Индивидуальные магнитные свойства различных веществ определяются, в первую очередь, строением электронных оболочек атомов, входящих в их состав, и характером взаимодействия между атомами вещества.

В зависимости от характера взаимодействия с внешним магнитным полем (реакции на внешнее поле) все вещества подразделяют на два больших класса: диамагнетики и парамагнетики.

Диамагнетиками называют вещества, ослабляющие магнитное поле, в которое они помещены (индуцированный в веществе магнитный момент направлен против вызывающего его внешнего поля).

Парамагнетиками называют вещества, усиливающие магнитное поле, в которое они помещены (суммарный магнитный момент атомов вещества направлен вдоль ориентирующего его внешнего поля).

Следует отметить, что диамагнетизм присущ всем без исключения веществам, но чаще всего он маскируется более сильным парамагнитным эффектом. В обоих классах существуют свои яркие представители, т. е. вещества, обладающие аномально большим откликом на внешнее магнитное поле. У диамагнетиков – сверхпроводники, среди парамагнетиков – ферромагнетики и антиферромагнетики.

Все магнетики можно подразделить на две группы, используя в качестве критерия сравнительную интенсивность взаимодействия атомных магнитных моментов с внешним магнитным полем и между собой. Вещества, для которых взаимодействие между отдельными магнитными моментами (в обычных условиях) пренебрежимо мало по сравнению взаимодействием каждого из моментов с внешним магнитным полем, называют *слабомагнитными* – это пара- и диамагнетики. *Сильномагнитными* называют вещества, в которых взаимодействие между атомными магнитными моментами является доминирующим, по сравнению с взаимодействием атомных моментов с внешним полем. Следует понимать, что такое подразделение весьма условно и зависит от тех внешних условий (прежде всего, температуры), в которых находится материал.

12-2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества

Орбитальное и спиновое движение электронов и атомных ядер эквивалентны токам, циркулирующим в атомах вещества. Эти круговые токи получили общее название *молекулярных токов*. Магнитное поле \vec{B} в веществе возбуждается токами проводимости (I, \vec{j}) и токами намагничивания (I_m, \vec{j}_m) . То, что источниками для вектора \vec{B} являются и токи проводимости \vec{j} , и токи намагничивания \vec{j}_m , проявляется в теореме о циркуляции:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_m).$$

Остается в силе теорема Гаусса, которая выражает отсутствие в природе магнитных зарядов и означает, что линии вектора \vec{B} и при наличии вещества остаются всюду непрерывными: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$, или в дифференциальном виде $\text{div} \vec{B} = 0$.

Магнитные свойства среды характеризуются *вектором намагничивания* \vec{J} , который определяется как результирующий (средний) магнитный момент единицы объема вещества, создаваемый молекулярными токами. По определению средний магнитный момент единицы объема равен:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{\Delta V}. \quad (12-3)$$

Здесь $\vec{\mu}_i$ – магнитный момент отдельной молекулы; ΔV – физически малый объем в окрестности данной точки. Если ввести средний магнитный момент молекулы $\vec{\mu}$, то вектор намагничивания равен:

$$\vec{J} = n\vec{\mu}, \quad (12-4)$$

где n – концентрация атомов. Магнитный момент элемента объема dV определяется:

$$d\vec{\mu} = \vec{J} dV. \quad (12-5)$$

Вполне очевидно, что токи намагничивания \vec{j}_m связаны с намагниченностью \vec{J} : чем сильнее токи \vec{j}_m , тем больше магнитный мо-

мент единицы объема. Внешнее магнитное поле определенным образом влияет на намагниченность вещества, так как влияет как на сами молекулярные, так и на ориентацию магнитных моментов отдельных атомов. Связь между внешним магнитным полем и намагниченностью характеризуется магнитными восприимчивостью и проницаемостью.

Определим связь между вектором намагничивания и молекулярными токами. Для этого вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, которые охватываются произвольно выбранным контуром L (рис. 12-2, *а*). Натянем на контур L произвольную поверхность S и найдем полный молекулярный ток через эту поверхность. Из рисунка видно, что молекулярные токи можно подразделить на те, которые пересекают поверхность дважды, причем в разных направлениях, и поэтому не вносят вклада в результирующий ток намагничивания, и на те, которые, обвиваясь вокруг контура L , пересекают поверхность S только один раз. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания I_m , пронизывающий поверхность S .

Пусть каждый молекулярный ток равен I_1 и охватывает площадь S_1 . Тогда элемент dl контура L обвивают те молекулярные токи, чьи центры попадают внутрь косоуго цилиндра объемом

$$dV = S_1 dl \cos \alpha,$$

где α – угол между элементом контура $d\vec{l}$ и направлением вектора \vec{J} в данном месте (рис. 12-2, *б*). Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз и дают вклад в ток намагничивания $dI_m = I_1 n dV$, где n – концентрация атомов. Подставляя выражение для dV , получаем:

$$dI_m = I_1 S_1 n dl \cos \alpha = \mu n dl \cos \alpha = J dl \cos \alpha = \vec{J} d\vec{l}.$$

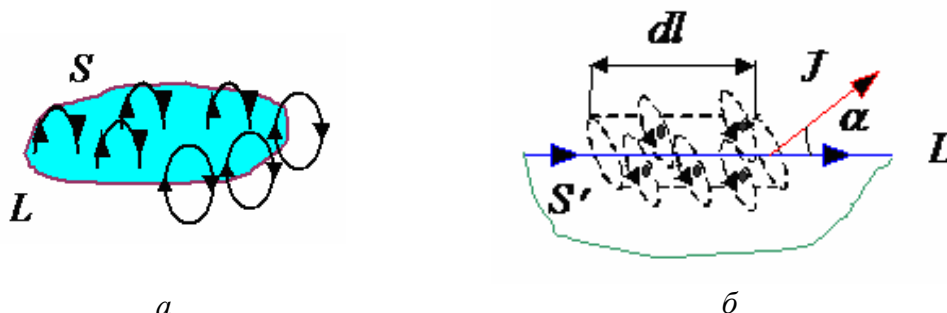


Рис. 12-2

Здесь учтено, что $I'S' = P_m$ – магнитный момент отдельной молекулы (молекулярного тока), а $nP = nIS$ – магнитный момент единицы объема вещества. Проинтегрировав по всему контуру, получим теорему о циркуляции для вектора \vec{J} :

Циркуляция намагниченности \vec{J} по произвольному контуру L равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых контуром L , где полный ток определяется:

$$\oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_m \cdot \vec{n} dS = I_m, \quad \vec{P}_m = I_m S \vec{n}, \quad (12-6)$$

причем интегрирование проводится по произвольной поверхности S , натянутой на контур L . Если намагниченность однородна ($\vec{J} = \text{const}$), то $\vec{j}_m = 0$. Это связано с тем, что молекулярные токи внутри магнетика в местах соприкосновения текут в противоположных направлениях и компенсируют друг друга ($\vec{j}_m = 0$). Нескомпенсированным остается только ток по поверхности, который и создает макрополе $\vec{J} = \text{const}$.

Если магнетик неоднородный, то ток намагничивания, вообще говоря, пронизывает всю поверхность и $\vec{j}_m \neq 0$.

Подставим в выражение для закона полного тока $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_m)$ полученный результат для тока намагничивания.

Введем вспомогательный вектор – *напряженность магнитного поля* $\vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{J}$:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_L (\vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (12-7)$$

После введения вектора \vec{H} в правой части уравнений остаются только токи проводимости (токи намагничивания выпадают из уравнений). В этом и заключается смысл введения этого вспомогательного вектора. Векторы \vec{J} и \vec{H} имеют одинаковую единицу измерения – А/м.

Между этими векторами существует определенная связь, которая определяется типом магнетика. Сильномагнитные вещества, к которым относятся ферромагнетики (железо, кобальт, никель и др.) характеризуются весьма сложной зависимостью между векторами намагниченности \vec{J} и магнитной индукции \vec{B} . Во-первых, эта зависимость нелинейная, а во-вторых, у таких материалов наблюдается гистерезис, т. е. неоднозначная зависимость между этими величинами,

обусловленная наличием у них «памяти» о своем предыдущем состоянии.

Для парамагнитных и диамагнитных сред зависимость между векторами \vec{J} и \vec{B} линейная. Однако, в силу опять-таки исторических причин, принято связывать между собой векторы намагниченности \vec{J} и напряженности магнитного поля \vec{H} .

Для изотропных сред можно записать:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (12-8)$$

Для анизотропных сред χ – тензор, и направление вектора намагниченности \vec{J} может не совпадать с направлением вектора напряженности \vec{H} . Величина χ называется *магнитной восприимчивостью* (или тензор магнитной восприимчивости) и имеет следующие свойства:

1. Для слабомагнитных веществ и в слабых полях χ не зависит от \vec{H} ;
2. χ безразмерна;
3. χ является тензором для анизотропных сред;
4. χ может быть больше и меньше нуля.

Следует отметить, что χ служит коэффициентом пропорциональности и не имеет какого-либо другого физического смысла. Для изотропных сред запишем:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (12-9)$$

где μ – *магнитная проницаемость* вещества:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (12-10)$$

Величины χ и μ используются в качестве классификаторов и определителей магнитных свойств веществ:

- $\chi < 0, \mu > 0$ – диамагнетики (CO_2 , N_2 , H_2O , Ag и другие);
 $\chi > 0, \mu < 0$ – парамагнетики (O_2 , Al, Pt, FeCl_3 и другие).

12-3. Элементарная теория диамагнетизма

Как уже отмечалось, диамагнетизм присущ всем веществам, но проявляется лишь у тех веществ, атомы которых в отсутствие внешнего магнитного поля не обладают магнитным моментом.

Рассмотрим движение электрона в атоме с позиций классической физики. Частица массой m , движущаяся по круговой орбите ра-

диусом \vec{r} со скоростью \vec{v} , обладает механическим моментом количества движения $\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}]$ (рис. 12-4, а). Вращение электрона вокруг ядра создает круговой ток. Поэтому орбитальное движение электрона можно охарактеризовать магнитным моментом \vec{P}_m . Во внешнем магнитном поле на него действует момент силы:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B},$$

который стремится развернуть орбитальный магнитный момент электрона в направлении магнитного поля \vec{B} . Механический момент импульса $\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}]$, обусловленный орбитальным движением электрона, направлен в сторону, противоположную магнитному моменту \vec{P} (т. к. заряд электрона $e^- < 0$) и может изменяться под действием силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля (сила Лоренца).

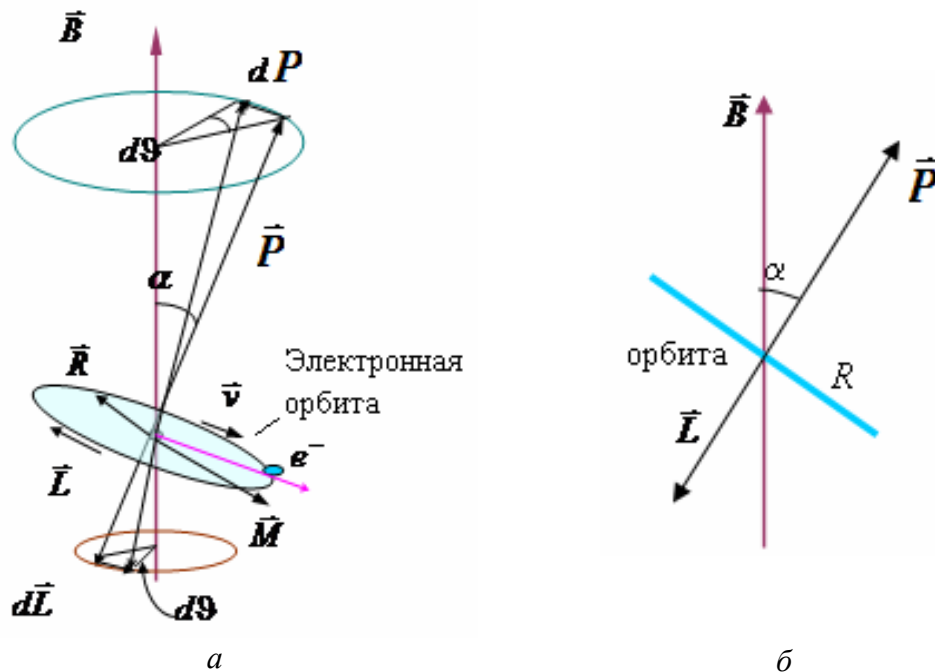


Рис. 12-4

Найдем изменение момента импульса электрона $d\vec{L}$. Механический момент количества движения электрона связан с моментом сил, действующим на электрон в магнитном поле, уравнением:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Следовательно, изменение момента импульса электрона $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Очевидно, что вектора $d\vec{L}$ и \vec{M} параллельны. Изменение момента импульса орбитального движения электрона можно связать с углом поворота $d\vartheta$ плоскости (\vec{B}, \vec{P}_m) или (\vec{B}, \vec{L}) вокруг направления магнитного поля \vec{B} . Угол $d\vartheta$ называется *углом прецессии*. Так как вектор \vec{M} перпендикулярен плоскости (\vec{B}, \vec{P}_m) , или (\vec{B}, \vec{L}) , то и $d\vec{L}$ также перпендикулярен этой плоскости. Модуль вектора приращения момента импульса равен:

$$|d\vec{L}| = |\vec{M}|dt = \left| \left[\vec{P}_m \vec{B} \right] \right| dt = P_m \cdot B \sin \alpha \cdot dt.$$

Тогда угол прецессии определяется отношением длины дуги к радиусу:

$$d\vartheta = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}| \sin \alpha} = \frac{P_m \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot dt}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{P_m \cdot B}{L} dt,$$

а угловая скорость прецессии соответственно равна:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{P_m \cdot B}{L} = \frac{e}{2m} B, \quad (12-11)$$

так как P_m/L есть гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона, которое равно $e/2m$. Итак, орбита электрона прецессирует с постоянной угловой скоростью (частотой) – частотой *ларморовской прецессии*: $\omega_L = \frac{eB}{2m}$. Частота ω_L одинакова для всех электро-

нов и не зависит от радиуса орбиты и наклона орбиты к вектору индукции внешнего магнитного поля \vec{B} . Ларморовская частота ω_L много меньше частоты ω орбитального движения электрона $\omega_L \ll \omega$ даже в очень сильных магнитных полях.

Теорема Лармора: *при наличии внешнего постоянного магнитного поля внутреннее движение электронов атома не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью ω_L* :

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m} \vec{B}$$

Вектор угловой скорости ларморовского вращения электронов $\vec{\omega}_L$ совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \vec{B} и не зависит от направления скорости движения электрона орбите. Таким образом, все орбиты электронов в атоме испытывают одинаковую прецессию. Так как заряд электрона отрицательный, то магнитный момент M' , связанный с этим вращением, направлен против поля \vec{B} и может быть представлен как

$$P_m = IS = \frac{e\omega_L}{2\pi} \pi \langle r^2 \rangle = \frac{e\omega_L}{2} \langle r^2 \rangle,$$

введен средний квадрат радиуса проекции орбиты на плоскость, перпендикулярную направлению поля. В результате создается намагничивание среды \vec{J} , направленное против вектора вызывающего его магнитного поля \vec{B} . Это явление называют *диамагнетизмом*.

Рассчитаем диамагнитные восприимчивость и проницаемость вещества. Момент импульса электрона, обусловленный процессией, равен $L_L = mr^2\omega_L$, тогда соответствующий магнитный момент можно получить, используя гиромагнитное отношение:

$$\vec{P}_m = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega}_L = -\frac{e^2r^2}{4m} \vec{B}. \quad (12-11)$$

Чтобы найти наведенный магнитный момент атома, надо просуммировать вклад всех его электронов. Средний квадрат радиуса проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную полю \vec{B} , определяющий магнитный момент ларморовской прецессии, равен $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$. Расстояние электрона до ядра атома определяется выражением $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Полагая, что электроны в атоме распределены сферически симметрично, можем записать

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle R^2 \rangle.$$

Если в атоме Z электронов, то его средний магнитный момент, обусловленный ларморовской прецессией в магнитном поле равен:

$$M = -\frac{Ze^2(\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle)}{4m} B \approx -\frac{Ze^2}{6m} \langle R^2 \rangle B,$$

где $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = 2/3 \langle R^2 \rangle$.

Тогда для вектора намагниченности имеем:

$$\vec{J} = -\frac{nZe^2}{6m} \langle R^2 \rangle \mu_0 H.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (12-8), находим магнитную восприимчивость

$$\chi = -\frac{nZe^2}{6m} \mu_0 \langle R^2 \rangle.$$

Магнитная проницаемость материала:

$$\mu = 1 - \mu_0 \frac{nZe^2}{6m} \langle R^2 \rangle.$$

То есть получаем, что $\chi < 0$ и отсюда $\mu < 1$.

Энергия теплового движения слишком мала, чтобы изменить внутреннее движение в атоме. Поэтому восприимчивость и проницаемость диамагнетиков не должны зависеть от температуры. Этот вывод находится в согласии с опытом. С ларморовским вращением связана дополнительная кинетическая энергия атома. Магнитные силы не могут сообщить атому ларморовское вращение, т. к. они перпендикулярны скорости электрона и поэтому работы не производят. Поэтому магнитные силы могут только поддерживать, но не создавать ларморовское вращение. Величина диамагнитного эффекта мала, так как пропорциональна $\langle R^2 \rangle \sim 10^{-20} \text{ м}^2$. Например, магнитные восприимчивости гелия и аргона равны 0,999 999 997. Диамагнетизм есть универсальное явление, присущее всем средам. Однако в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

ЛЕКЦИЯ 13

ПАРАМАГНЕТИКИ И ФЕРРОМАГНЕТИКИ

13-1. Элементарная теория парамагнетизма.

13-2. Ферромагнетики.

13-3. Опыты Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис.

13-4. Спиновая природа ферромагнетизма. Домены.

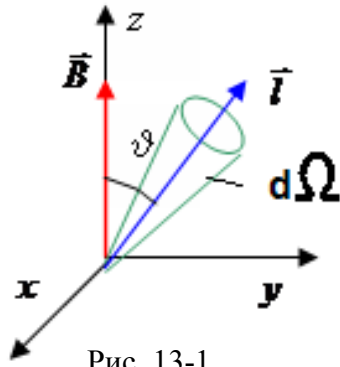
13-1. Элементарная теория парамагнетизма.

Вещества, у которых магнитная восприимчивость невелика, но $\chi > 0$, а магнитная проницаемость $\mu = 1 + \chi > 1$ называются *парамагнетиками*. Явление *парамагнетизма* проявляется у веществ, атомы которых обладают собственным магнитным моментом в отсутствие магнитного поля.

Будем рассматривать лишь слабомагнитные, или не обладающие атомным магнитным порядком вещества, т. е. такие, в которых взаимодействием между магнитными моментами отдельных атомов можно пренебречь, и рассматривать только взаимодействие атомных магнитных моментов с внешним полем

В отсутствие внешнего поля в пространстве нет выделенных направлений, магнитные моменты отдельных атомов ориентированы беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент парамагнетика равен нулю. Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов \vec{p} ориентируются преимущественно по полю \vec{B} , т. к. минимум энергии (устойчивое состояние) достигается при совпадении направлений векторов \vec{p} и \vec{B} . Это следует из выражения для энергии взаимодействия магнитного дипольного момента \vec{p} с внешним магнитным полем \vec{B} : $W = -\vec{p} \cdot \vec{B}$. Таким образом, вещество намагничивается в направлении вектора индукции магнитного поля \vec{B} , т. е. наблюдается парамагнетизм.

Поскольку намагниченность парамагнетика обусловлена ориентацией дипольных магнитных моментов во внешнем поле, введем функцию распределения $f(\vec{l})$ для описания распределения осей диполей по направлениям в пространстве. Величина $dn = nf(\vec{l})d\Omega$ определяет среднее число диполей, оси которых лежат в пределах телесного угла $d\Omega$, в единице объема вещества (рис. 13-1).



Единичный вектор \vec{l} указывает направление оси элементарного телесного угла $d\Omega$. В отсутствии внешнего магнитного поля все направления дипольных моментов равновероятны, т. е. $f(\vec{l})$ имеет одинаковые значения по всем направлениям. При наличии магнитного поля в состоянии термодинамического равновесия пространственная ориентация магнитных моментов должна подчиняться распределению Больцмана, т. е.

$$f(\vec{l}) = C \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = C \exp\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{B}}{kT}\right). \quad (13-1)$$

Если выполняется условие $\vec{p} \cdot \vec{B}/kT \ll 1$, то функцию $f(\vec{l})$ можно разложить в ряд и ограничиться первым слагаемым разложения. Сделаем численные оценки. Положим магнитный момент атома равным магнетону Бора ($\mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24}$ А м², поле $B = 1$ Тл; температуру $T = 300$ К). Тогда $\vec{p} \cdot \vec{B} = 9 \cdot 10^{-27}$ Дж; $kT \approx 4 \cdot 10^{-21}$ Дж и указанное условие хорошо выполняется. Поэтому, для не слишком низких температур T и не слишком больших магнитных полей получим (предполагая, что поле \vec{B} направлено вдоль оси z):

$$f(\vec{l}) \approx C \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{B}}{kT}\right) = C \left(1 + \frac{pB \cos \vartheta}{kT}\right). \quad (13-2)$$

Постоянная C определяется из условия нормировки:

$$\int f(\vec{l}) d\Omega = 1.$$

Здесь предполагается, что интегрирование (13-2) производится по всем направлениям в пространстве:

$$C \int d\Omega + C \frac{\vec{p} \cdot \vec{B}}{kT} \int \cos \vartheta d\Omega = C 4\pi = 1,$$

откуда получим $C = \frac{1}{4\pi}$. Второй интеграл обращается в нуль, т. к. $\cos \vartheta$ с равной вероятностью может иметь одинаковые по модулю положительные и отрицательные значения.

Если магнитный момент атома \vec{p} заключен в элементарном телесном угле $d\Omega$, т. е. направлен вдоль вектора \vec{l} , то его вклад в намагниченность равен $p \cos \vartheta$. Намагниченность для dn атомов, магнитные моменты которых направлены под углом ϑ к магнитному полю равна

$$dJ = pf(\vec{l}) \cos \vartheta dn.$$

Намагниченность среды J можно получить, подставив интегрируя это выражение для dJ по всему объему ($\Omega = 4\pi$), с учетом (13-2) и выражения $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ в сферических координатах (ϑ изменяется в пределах от 0 до π , азимутальный угол φ изменяется в пределах от 0 до 2π):

$$\begin{aligned} J &= \frac{n}{4\pi} p \int \left(1 + \frac{pB}{kT} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta d\Omega = \frac{n}{4\pi} p \left(\int \cos \vartheta d\Omega + \frac{pB}{kT} \int \cos^2 \vartheta d\Omega \right) = \\ &= \frac{n}{4\pi} p \left(0 + \frac{pB}{kT} \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{np^2}{3kT} B. \end{aligned} \quad (13-3)$$

Таким образом, намагниченность вещества равна:

$$J = \frac{np_a^2}{3kT} B. \quad (13-4)$$

Используя соотношение (12-9), получим:

$$\frac{\chi}{1 + \chi} = \frac{np_a^2}{3kT},$$

или, учитывая малость значения χ ($\sim 10^{-3}$), имеем для парамагнитной восприимчивости:

$$\chi = \frac{np_a^2}{3kT}. \quad (13-5)$$

Зависимость магнитной восприимчивости от температуры

$$\chi = \frac{C}{T}$$

носит название *закона Кюри* и она была обнаружена экспериментально (Пьер Кюри, французский физик, 1859–1906) еще до разработки соответствующей теории. Закон Кюри хорошо описывает парамагне-

тизм газов, паров щелочных металлов, разбавленных жидких растворов парамагнитных солей и некоторых парамагнитных солей в кристаллическом состоянии. Для большинства твердых тел температурная зависимость магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри – Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta_0},$$

где постоянная T_0 учитывает взаимодействие магнитных моментов атомов между собой и с внутрикристаллическим полем и, таким образом, определяется свойствами вещества.

Теперь рассмотрим вопрос о механизме намагничивания парамагнетика. В магнитном поле атом как целое совершает регулярную прецессию с ларморовской частотой вокруг направления магнитного поля. При таком движении угол между направлениями магнитного момента \vec{p} и поля \vec{B} и, следовательно, проекция вектора \vec{p} на направление магнитного поля остаются неизменными. Поэтому прецессия сама по себе не может привести к намагничиванию парамагнетика. Намагничивание (для орбитального движения – изменение наклона плоскости орбиты относительно направления магнитного поля) *возникает в результате взаимодействий атомов между собой*. Если атом получает толчок в направлении прецессионного вращения, то соответствующий момент сил вызовет дополнительную прецессию вокруг оси, перпендикулярной магнитному полю. Это приведет к увеличению угла между векторами \vec{p} и \vec{B} . Толчок, полученный атомом в противоположном направлении, уменьшит этот угол. Взаимодействия первого типа будут размагничивать парамагнетик, а второго – намагничивать. В целом эффект намагничивания будет преобладающим, т. к. толчки, получаемые навстречу движению, будут в среднем сильнее толчков, получаемых «вдогонку». Таким образом, намагничивание веществ создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой. Магнитное поле \vec{B} только задает направление в пространстве и поддерживает намагничивание парамагнетика, но не создает его.

13-2. Ферромагнетики

Ферромагнетиками называются вещества, обладающие атомным магнитным порядком в отсутствие внешнего поля. Другими словами,

ферромагнитным называется такое состояние вещества, при котором энергия взаимодействия между атомными магнитными моментами значительно превышает энергию взаимодействия магнитных моментов отдельных атомов с внешним магнитным полем.

Ферромагнитное состояние вещества реализуется ниже определенной температуры, называемой температурой Кюри. При более высоких температурах эти вещества, как правило, переходят в парамагнитное состояние, в котором температурная зависимость их магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри – Вейсса. Значения магнитной проницаемости для большинства ферромагнетиков достигают сотен и тысяч единиц (чистое железо – 5000), а для некоторых специальных сплавов приближаются к миллиону (супермалой – 800 000).

Среди чистых химических элементов ферромагнитными свойствами обладают переходные металлы группы железа: железо Fe, кобальт Co, никель Ni (3d-металлы) и редкоземельные металлы гадолиний Gd, тербий Tb, диспрозий Dy, гольмий Ho, эрбий Er, тулий Tm (4f-элементы). Кроме того, ферромагнетиками является большое количество сплавов этих и некоторых других металлов.

Наиболее общими и характерными особенностями ферромагнетиков являются:

1. сложная нелинейная зависимость между намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} или между векторами \vec{B} и \vec{H} ,
2. наличие *магнитного гистерезиса*, т. е. связь между J и H или B и H является неоднозначной и определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика,
3. высокие значения магнитной проницаемости,
4. наличие температуры перехода в парамагнитную фазу (точка Кюри).

Отмеченные свойства обусловлены со специфической структурой ферромагнетиков. В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнитный образец можно рассматривать как совокупность большого числа малых (с размером 1–10 мкм) пространственных областей, каждая из которых намагничена до насыщения. Эти области получили название *доменов*. При этом векторы намагниченности отдельных доменов направлены так, что суммарный магнитный момент образца равен нулю. В монокристаллических ферромагнетиках существуют оси легкого намагничивания (главные оси симметрии кристалла), вдоль

(против) которых и направлены векторы самопроизвольной намагниченности ферромагнитных доменов.

13-3. Опыты Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис

Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость между намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} или между векторами \vec{B} и \vec{H} . Впервые эту зависимость систематически исследовал для железа А. Г. Столетов с помощью баллистического гальванометра. Рассмотрим результаты этих опытов.

Если тело изначально не намагничено, то по мере возрастания \vec{H} намагниченность \vec{J} сначала быстро растет, а затем становится практически постоянной. Это состояние называется состоянием насыщения, на участке насыщения кривая $J = J(H)$ переходит в горизонтальную прямую (рис. 13-2, а).

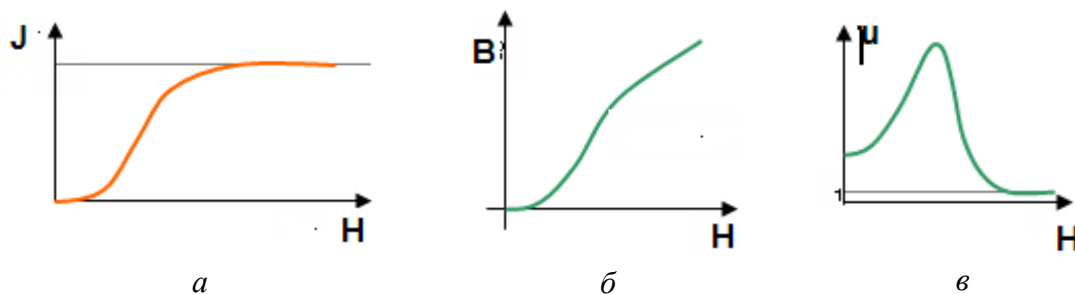


Рис. 13-2

Магнитная индукция в образце также возрастает с ростом напряженности поля. В состоянии насыщения $B = \mu_0 H + \text{const}$, т. е. кривая $B = B(H)$ переходит в прямую. Для ферромагнетиков также выполняются соотношения $J = \chi H$ и $B = \mu \mu_0 H$. Однако теперь магнитные восприимчивость χ и проницаемость μ следует рассматривать как функции напряженности магнитного поля H . Эти функции сначала возрастают с увеличением поля, проходят через максимум при достижении в материале намагниченности насыщения и стремятся в сильных полях к нулю ($\chi \rightarrow 0$) и единице ($\mu \rightarrow 1$), соответственно (рис. 13-2, в).

Из анализа кривой намагничивания можно выделить следующие основные процессы, происходящие в ферромагнетике. Намагничивание ферромагнетика состоит в переориентации векторов намагниченности доменов в направлении приложенного поля и включает в себя

смещение, вращение и парапроцесс.

Процесс смещения в многодоменном ферромагнетике заключается в перемещении границ между доменами: объем доменов, векторы которых составляют наименьший угол с направлением напряженности магнитного поля H , при этом увеличивается за счет соседних доменов с энергетически менее выгодной ориентацией вектора намагниченности относительно поля. В слабых полях смещение имеет обратимый (упругий) характер, т. е. при выключении поля границы доменов возвращаются в исходное положение. При увеличении напряженности поля процесс намагничивания становится необратимым, т. е. при $H = 0$ намагниченность нулю не равна (остаточная намагниченность). Этим объясняется наличие в ферромагнетиках гистерезиса, который рассмотрен ниже.

Процесс вращения состоит в повороте векторов \vec{J} в направлении поля \vec{H} . При полном совпадении вектора намагниченности \vec{J} с направлением \vec{H} достигается, так называемое, техническое магнитное насыщение, равное величине намагниченности насыщения ферромагнетика при данной температуре.

Парапроцесс обусловлен ориентацией в поле элементарных носителей магнетизма (орбитальных и спиновых магнитных моментов), остававшихся неупорядоченными вследствие теплового движения. Парапроцесс в большинстве случаев дает очень малый прирост намагниченности, поэтому намагничивание ферромагнетика определяется в основном процессами смещения и вращения.

Если первоначально не намагниченный ферромагнетик намагничивать, увеличивая напряженность поля H от нуля до значения H_1 , при котором наступает насыщение (точка A на рис. 13-3), а затем уменьшать поле от $+H_1$ до $-H_1$, то кривая намагничивания, как показывает опыт, пойдет не по прежнему пути OA_1A , а пройдет выше, по пути $ACKD$.

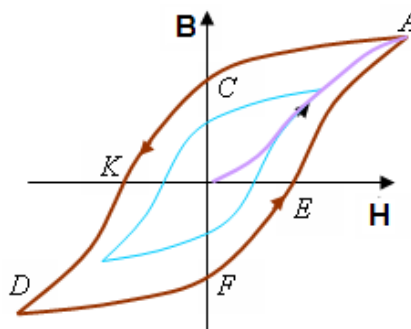


Рис. 13-3

Если теперь изменять напряженность поля в обратном направлении от $-H_1$ до $+H_1$, то кривая намагничивания пройдет ниже, по пути $DFEA$. Полученная замкнутая кривая называется *петлей гистерезиса*. Если в точках A и D материал достигает насыщения, то петля гистерезиса носит название *максимальной*, или

предельной. Когда в крайних точках петли насыщения нет, то получается петля меньшего размера, как бы вписанная в предельную. Кривая OA_1A , называется *основной кривой намагничивания*. Из рисунка видно, что при $H = 0$ индукция B не обращается в нуль. Величина $B_{\text{ост}}$, численно равная отрезку OC на оси ординат, называется *остаточной индукцией*, а соответствующая ей величина $J = B_{\text{ост}}/\mu_0$ – *остаточной намагниченностью*. С наличием остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов.

Для того, чтобы размагнитить материал, надо довести кривую намагничивания до точки K т. е. приложить к образцу магнитное поле H_c , численно равное длине отрезка OK на оси абсцисс и имеющее направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Величина H_c называется *коэрцитивной силой*. Значения остаточного намагничивания и коэрцитивной силы для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. По величине коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на магнитно-мягкие (материалы для трансформаторов, электромоторов, генераторов и т. д.) и магнитно-жесткие (постоянные магниты).

13-4. Спиновая природа ферромагнетизма. Домены

Расчеты показывают, что внутренние поля, необходимые для объяснения ферромагнетизма, в тысячи и десятки тысяч раз превышают те магнитные поля, которые могут создать ориентированные магнитные моменты атомов в веществе. Поэтому ферромагнетизм не может быть объяснен магнитным взаимодействием атомов. Это доказал прямой опыт, поставленный Я. Г. Дорфманом в 1927 г. В опытах Штерна и Герлаха, в которых измерялся магнитный момент атомов и было доказано существование спина электрона, было установлено, что магнитный момент атомов железа (типичного ферромагнетика) и серебра (парамагнетик) одного порядка, хотя намагниченность железа намного превосходит намагниченность серебра.

Объяснение свойств ферромагнетиков смогла дать только квантовая физика. Это было сделано в работах Я. И. Френкеля и В. Гейзенберга. Суть этого объяснения сводится к следующему

«Распад» ферромагнетика на домены происходит потому, что этот процесс энергетически выгоден. Он является следствием конкуренции двух видов взаимодействий: *обменного*, имеющего чисто квантовую природу, и *магнитного* (взаимодействия магнитных моментов).

Обменное взаимодействие имеет электростатическую природу и эффективно проявляется в тех случаях, когда «перекрываются» *волновые функции* отдельных частиц системы, т. е. существуют области пространства, в которых с заметной вероятностью может находиться частица в различных состояниях движения. Для электронов обменное взаимодействие является следствием принципа Паули, препятствующего сближению тождественных частиц с одинаковым направлением *спинов*, и эффективно проявляется как отталкивание их друг от друга на расстояниях порядка или меньше волны де Бройля. Обменное взаимодействие в ферромагнетике приводит к *параллельной* ориентации электронных спинов соседних атомов.

Минимум суммарной энергии этих взаимодействий определяет устойчивую конфигурацию внутренней структуры магнетика. Обменное взаимодействие – короткодействующее (радиус действия ~ размеров атомов). Оно стремится установить магнитные моменты атомов параллельно и ответственно за однородную намагниченность в доменах. Минимум энергии обменного взаимодействия электронов достигается при намагничивании всего ферромагнетика в определенном направлении. Однако такому состоянию магнетика соответствует значительная энергия создаваемого им магнитного поля. Взаимодействие между магнитными моментами не может конкурировать с обменным в пределах домена. Однако, являясь дальнодействующим, оно ориентирует антипараллельно векторы намагниченности соседних доменов. Тем самым магнитное поле, возбуждаемое ферромагнетиком, ослабляется, и уменьшается соответствующая ему энергия. Благодаря короткодействующему характеру обменных сил, энергия обменного взаимодействия остается неизменной для всех электронов, за исключением электронов на границах доменов. Энергия этих электронов возрастает из-за различной ориентации электронных спинов атомов, принадлежащих соседним доменам. По мере увеличения числа доменов поверхностная, а с ней и полная энергия обменного взаимодействия возрастает, но убывает энергия магнитного поля ферромагнетика. Образование доменов прекращается, когда сумма обменной и магнитной энергий достигает минимума. Этим условием определяется и размер доменов. При некоторых критически малых размерах ферромагнитных образцов образование в них нескольких доменов может стать энергетически невыгодным. Доменную структуру вещества можно наблюдать экспериментально методом порошковых фигур и при про-

пускании поляризованного света через ферромагнитные пленки.

Антиферромагнетизм. В зависимости от свойств кристалла обменные силы могут вызывать не только параллельную, но и антипараллельную ориентацию электронных спинов соседних атомов. В простейшем случае магнитную структуру антиферромагнетика можно представить как систему вставленных друг в друга пространственных решеток магнитных ионов – магнитных подрешеток, в узлах каждой из которых находятся магнитные моменты, параллельные друг другу. Каждая из подрешеток состоит из атомов одного сорта. Суммарные магнитные моменты подрешеток компенсируются, поэтому в отсутствие внешнего поля результирующий магнитный момент антиферромагнетика равен нулю. Под действием внешнего поля антиферромагнетики подобно парамагнетикам приобретают слабую намагниченность. Для магнитной восприимчивости χ антиферромагнетиков типичны значения 10^{-4} – 10^{-5} . Примеры таких веществ: MnO , MnS , MnF_2 , FeF_2 , FeCl_2 , Cr_2O_3 и другие.

В антиферромагнетике обменные силы отвечают за создание антиферромагнитного порядка и стремятся установить каждую пару соседних магнитных моментов строго антипараллельно. Ориентацию магнитных моментов в кристалле (относительно кристаллографических осей) определяют силы магнитной анизотропии. По аналогии с ферромагнетиком направление магнитных моментов в антиферромагнетике называют осью легкого намагничивания. Переход из антиферромагнитного состояния в парамагнитное происходит при температуре Нееля T_N и представляет собой фазовый переход II рода.

Если величина намагничивания обеих подрешеток неодинакова, то возникает нескомпенсированный антиферромагнетизм, называемый *ферримагнетизмом*. В этом случае вещество в отсутствие внешнего поля обладает отличным от нуля магнитным моментом, величина которого может быть довольно значительна (сравнима с ферромагнитным).

ЛЕКЦИЯ 14

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

14-1. Условия на границе раздела двух магнетиков.

14-2. Понятие магнитной цепи. Формула Гопкинсона.

14-3. Расчет простейших магнитных цепей. Магнитный экран и магнитный шунт.

14-1. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим границу двух магнетиков. Получим граничные для векторов \vec{B} и \vec{H} , исходя из теоремы о потоке вектора через замкнутую поверхность: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ и теоремы о циркуляции вектора \vec{H} по замкнутому контуру: $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$.

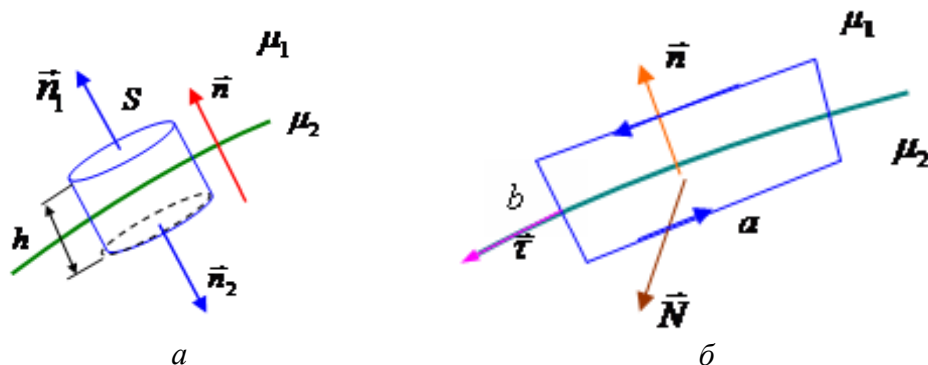


Рис. 14-1

Определим поток вектора \vec{B} через поверхность малого цилиндра, охватывающего границу раздела 2-х сред:

$$B_{1n_1}S + B_{2n_2}S + \langle B_\tau \rangle S_{\text{бок}} = 0,$$

где S – площадь основания цилиндра, $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности. Устремляя высоту цилиндра $h \rightarrow 0$ и $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$, получаем на границе:

$$B_{1n_1} = -B_{2n_2}.$$

Учитывая, что n_1 и n_2 – противоположно направленные нормали, и вводя общую нормаль, имеем:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (14-1)$$

Нормальные составляющие вектора \vec{B} непрерывны на границе раздела двух магнетиков.

Нормальные составляющие вектора \vec{H} получим, используя соотношение $\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}$. Тогда из (14-1) следует:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Отсюда получим соотношение для нормальных составляющих напряженности магнитного поля:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Нормальные составляющие вектора \vec{H} терпят разрыв на границе двух магнетиков.

Предположим, что вдоль поверхности раздела магнетиков течет ток проводимости I . Применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} к очень малому прямоугольному контуру, пересекающего границу 2-х сред, причем высота контура b пренебрежимо мала по сравнению с его длиной a :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{2\tau}a - H_{1\tau}a + 2\langle H_n \rangle b = \mu_0 I = \mu_0 j_N ab.$$

Здесь j_N – нормальная составляющая плотности тока к выбранному контуру, т. е. перпендикулярно к векторам $\vec{n}, \vec{\tau}$ (если $\vec{\tau}$ единичный вектор вдоль контура). Тогда устремляя $b \rightarrow 0$, получаем:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \mu_0 i_N,$$

где $\vec{i} = \vec{j}b$ плотность поверхностного тока.

Тангенциальная составляющая вектора \vec{H} при переходе границы раздела магнетиков, вообще говоря, претерпевает скачок, связанный с наличием поверхностных *токов проводимости*. Если токов проводимости вдоль поверхности раздела нет, то тангенциальные составляющие вектора \vec{H} также непрерывны:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Итак, если на границе раздела двух однородных магнетиков тока проводимости нет, то при переходе этой границы составляющие B_n

и H_τ изменяются непрерывно, без скачка. Составляющие B_τ и H_n при этом претерпевают скачок.

14-2. Понятие магнитной цепи. Формула Гопкинсона.

Ранее было показано, что магнитное поле тороида полностью заключено внутри его сердечника. Таким же свойством обладает магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Совокупность областей пространства, в которых локализовано магнитное поле, называют *магнитной цепью*. Таким образом, внутренние полости тороида и бесконечно длинного соленоида представляют собой простейшие магнитные цепи. Для усиления магнитного поля применяют магнитные цепи, изготовленные из материалов с большими значениями относительной магнитной проницаемости. Чаще всего используют железо и его ферромагнитные сплавы с кобальтом, никелем, марганцем.

Источником возникновения магнитного поля в такой цепи является электрический ток в соленоидальных катушках, намотанных на всю цепь или на отдельные ее участки. Расчет магнитных цепей, составляющих необходимую часть всех электрических машин и большого числа электрических устройств (трансформаторов, электромагнитов и др.), представляет большой практический интерес.

Расчет магнитных цепей основывается на законе полного тока и теореме Гаусса для магнитного поля, с помощью которых удастся получить сравнительно простые соотношения, называемые *законами магнитных цепей*.

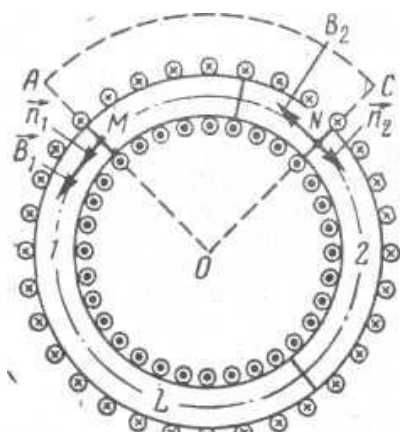


Рис. 14-2

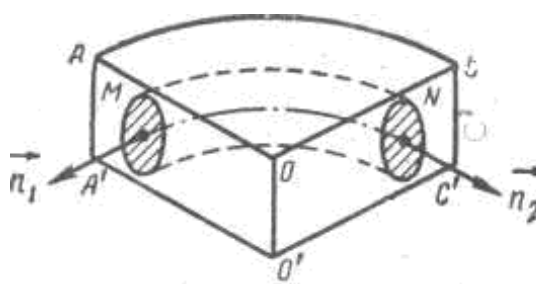


Рис.14-3

В качестве примера рассчитаем магнитное поле тороида, изображенного на рис. 14-2. Сердечник тороида состоит из двух частей 1 и 2, которые изготовлены из веществ с различными магнитными про-

нищаемостями μ_1 и μ_2 . Обозначим через S площадь поперечного сечения, сердечника. Для упрощения расчетов предположим, что радиус сечения S мал по сравнению с размером тороида, поэтому в пределах площадки S магнитное поле можно считать однородным. В противном случае сердечник пришлось бы разбить на отдельные кольца с достаточно малыми поперечными сечениями. Линии магнитной индукции в сердечнике представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси симметрии O тороида.

Проведем через ось O радиальные плоскости OA и OC , разрезающие тороид на две части (см. рис. 14-2). Построим цилиндрический сектор $AOCC'O'A'A$ (см. рис. 14-3), длину OO' которого вдоль оси симметрии O тороида выберем так, чтобы часть тороида MN находилась внутри объема сектора. Обозначим через S' полную поверхность цилиндрического сектора. По теореме Гаусса магнитный поток сквозь замкнутую поверхность S' равен нулю:

$$\int B_n dS = 0.$$

Магнитное поле тороида локализовано внутри его сердечника. Поэтому во всех точках боковой поверхности $ACC'A'A$ и оснований AOC и $A'O'C$ цилиндрического сектора индукция B магнитного поля равна нулю. Следовательно, и магнитный поток сквозь эти поверхности равен нулю.

По тем же соображениям магнитные потоки сквозь плоские поверхности $AOO'A'A$ и $COO'C'C$ равны соответственно потокам сквозь сечения S_1 и S_2 сердечника тороида в точках M (Φ_{m1}) и N (Φ_{m2})

$$\hat{O}_{m1} = \int_{S_1} B_n dS_1, \quad \hat{O}_{m2} = \int_{S_2} B_n dS. \quad (14-2)$$

На основании всего сказанного уравнение (14-2) можно записать в виде $\Phi_{m1} + \Phi_{m2} = 0$, или

$$\Phi_{m1} = -\Phi_{m2}. \quad (14-3)$$

Из уравнения (14-3) следует, что абсолютная величина магнитного потока во всех сечениях магнитной цепи тороида одинакова. Как известно, сила электрического тока в любом сечении неразветвленной цепи также одинакова. Поэтому, проводя аналогию между магнитной и электрической цепями, можно сказать, что *магнитный поток играет в магнитной цепи такую же роль, какую в электрической цепи играет сила тока.*

Вычислим интегралы, стоящие в формулах (14-2). Внешняя нормаль n_1 к плоскому сечению S_x совпадает по направлению с вектором индукции \vec{B}_1 а внешняя нормаль n_2 сечению S_r противоположна по направлению вектору индукции \vec{B}_2 . Поэтому

$$\begin{aligned}\hat{O}_{m1} &= \int_{S_1} B_n dS = \int_{S_1} B_1 dS = B_1 S_1, \\ \hat{O}_{m2} &= \int_{S_2} B_n dS = - \int_{S_2} B_{21} dS = -B_2 S_2.\end{aligned}\quad (14-4)$$

Подставив эти значения в формулу (14-3) и учитывая, что площади сечений S_1 и S_2 равны, т. е. $S_1 = S_2 = S$, получим $B_1 = B_2$. Следовательно, индукция магнитного поля тороида с составным сердечником во всех его сечениях одинакова. Поэтому, в дальнейшем будем ее обозначать через B без индекса, а магнитный поток в сердечнике – через Φ_m :

$$\Phi = BS. \quad (14-5)$$

Для нахождения индукции B воспользуемся законом полного тока, причем в качестве замкнутого контура L возьмем осевую линию тороида (см. рис. 14-3), представляющую собой одну из силовых линий магнитного поля. Вектор напряженности \vec{H} направлен по касательной к контуру L во всех его точках, поэтому:

$$H \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = H. \quad (14-6)$$

Нормальные составляющие напряженности магнитного поля в первой и второй частях сердечника тороида равны:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0}, \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \mu_0}. \quad (14-7)$$

Из формул (14-6) и (14-7) следует, что циркуляция вектора \vec{H} вдоль замкнутого контура L равна:

$$\oint_L H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_{l_1} H_1 dl + \oint_{l_2} H_2 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2,$$

где l_1 и l_2 – длины первой и второй частей магнитной цепи. С другой стороны, из закона полного тока следует, что

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI,$$

где I – сила электрического тока, а N – число витков в обмотке тороида.

Выразив H_1 и H_2 через индукцию по формулам (14-7), получим:

$$B \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0} + B \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0} = NI, \quad B = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 \mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0}}. \quad (14-8)$$

Подставляя значение B согласно (14-8) в формулу (14-5), получим выражение для магнитного потока в сердечнике тороида:

$$\hat{O}_m = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S}}. \quad (14-9)$$

Выражение (14-9) по своей форме подобно закону Ома для замкнутой электрической цепи $I = E/R$, где E – электродвижущая сила, а R – полное электрическое сопротивление цепи. Поэтому можно ввести обозначения:

$$E_m = NI, \quad R_m = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S}.$$

Величину E_m назовем магнитодвижущей силой, а R_m – полным магнитным сопротивлением цепи. Тогда формула (14-9) принимает вид;

$$\hat{O}_m = \frac{E_m}{R_m}. \quad (14-10)$$

Выражение (14-10) называется *формулой Гопкинсона* для магнитной цепи.

Магнитное сопротивление R_m участка цепи длиной l с полной площадью поперечного сечения S и относительной магнитной проницаемостью принимается равным следующему выражению:

$$R_m = \frac{l}{\mu \mu_0 S}. \quad (14-11)$$

Если площадь поперечного сечения S непостоянна, то

$$R_m = \int_0^l \frac{dl}{\mu \mu_0 S}. \quad (14-12)$$

Формула (14-11) подобна по своему виду формуле для электри-

ческого сопротивления цилиндрического проводника, причем аналогом удельной электрической проводимости является абсолютная магнитная проницаемость $\mu\mu_0$.

14.3. Расчет простейших магнитных цепей. Магнитный экран и магнитный шунт.

Из формул (14-9) и (14-11) видно, что общее магнитное сопротивление последовательно соединенных участков магнитной цепи равно сумме магнитных сопротивлений R_m участков, число которых n , равно сумме магнитных сопротивлений R_{mi} всех участков:

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi}.$$

Эта формула аналогична выражению для общего электрического сопротивления последовательно соединенных проводников.

Можно доказать, что для расчета разветвленных магнитных цепей (см. рис. 14-5) справедливы два правила Кирхгофа, которые по своей форме аналогичны правилам Кирхгофа для цепей постоянного электрического тока.

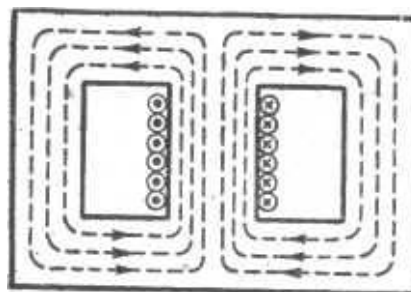


Рис.14-5

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков в участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю, т. е

$$\sum_{i=1}^n \hat{O}_{mi} = 0. \quad (14-13)$$

где n – число участков, сходящихся в узле.

Знак магнитного потока Φ_m определяется направлением соответствующих ему линий индукции. Если линии индукции подходят к узлу, то поток Φ_m считается положительным, а если линии индукции выходят из узла, то поток Φ_m считается отрицательным.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этом контуре, т. е.

$$\sum_{i=1}^k \hat{O}_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k E_{mi}, \quad (14-14)$$

где k — число участков, составляющих замкнутый контур.

Магнитные потоки Φ_m и магнитодвижущие силы E_m считаются в этом уравнении положительными, если направление соответствующих им магнитных полей (линий индукции) совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура.

Из правил Кирхгофа вытекает, что магнитные потоки в двух параллельно включенных участках магнитной цепи, не содержащих магнитодвижущих сил, обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям. Общее магнитное сопротивление R_m участка цепи, состоящего из n параллельно включенных магнитных сопротивлений R_m , равно

$$R_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^k (1/R_{mi})}. \quad (14-15)$$

Рассмотренные нами законы магнитных цепей можно проиллюстрировать рядом опытов.

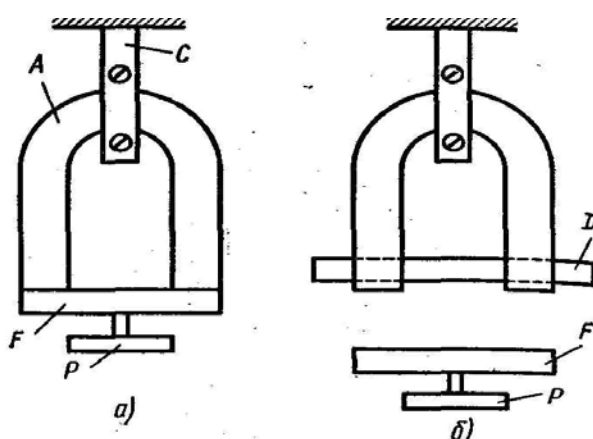


Рис. 14-6

2. Магнитный шунт.

Сильный подковообразный магнит A укреплен вертикально в деревянном зажиме C (рис. 14-6, a). Полюсы магнита замкнуты железной пластиной F с грузом P , величина которого подобрана так, чтобы вес пластины и груза P был несколько меньше подъемной силы магнита (рис. 14-6, a).

Если с помощью железной пластины D замкнут полюсы магнита A , как показано на рис. 14-6, b то пластина F отрывается от магнита и падает вниз. Присоединение пластины D приводит к разветвлению магнитной цепи, так что через пластину F идет лишь часть магнитного потока подковообразного магнита, и соответствующее ему магнитное поле недостаточно для удержания пластины F в равновесии.

Закоротим полюсы магнита A пластиной D , изготовленной из алюминия. При этом пластина F с грузом P по-прежнему будет прочно удерживаться магнитом A . Причина этого явления состоит в том, что магнитная проницаемость алюминия, как и других неферромагнитных материалов; очень близка к магнитной проницаемости воздуха. Поэтому введение алюминиевой пластины D не должно влиять на распределение магнитного потока в цепи подковообразного магнита.

Магнитный экран. Возьмем магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси. Приблизим к ней северный полюс полосового магнита. Под влиянием поля магнита стрелка повернется к нему своим южным полюсом. При перемещении полосового магнита следом за ним повернется и магнитная стрелка. Совершенно иная картина наблюдается, если магнит поместить внутрь толстой железной трубы. Поле такого магнита не действует на магнитную стрелку, которая независимо от положения трубы с магнитом *всегда располагается в плоскости магнитного поля Земли*. Если на магнит надеть трубу, сделанную из алюминия, меди или другого неферромагнитного материала, то его действие на стрелку будет таким же, как и в отсутствии трубы.

Рассмотрим еще один опыт. Поместим магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси, внутрь цилиндрической коробки, боковая стенка которой изготовлена из куска толстой железной трубы, а верхняя и нижняя стенки — стеклянные (рис. 14-7). По-

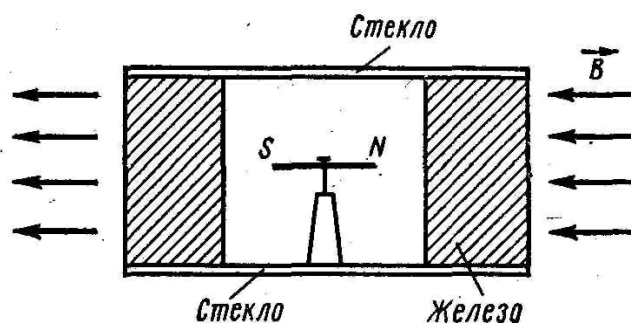


Рис. 14-7

мещающая коробку в однородное магнитное поле с индукцией B , направление которого показано на рис. 14-7, мы не обнаружим никакого действия магнитного поля на стрелку. Независимо от направления поля стрелка будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Следовательно, внутри коробки магнитное поле отсутствует так же, как в предыдущем опыте оно отсутствует вне железной трубы, надетой на полосовой магнит. Это явление широко используется для защиты измерительных приборов от влияния внешних магнитных полей. Экранирующее действие стенок железного сосуда можно объяснить, исходя из законов магнитных цепей. На рис. 14-8 показано

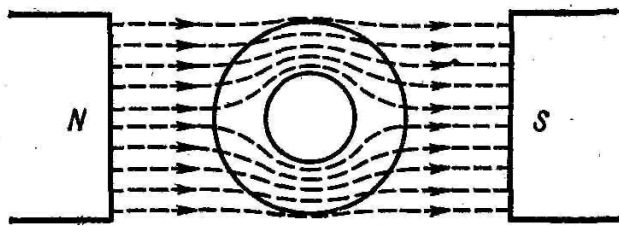


Рис. 14-8

массивное железное кольцо, помещенное между полюсами электромагнита. Внутренняя полость и стенки кольца представляют собой параллельно включенные магнитные сопротивления.

Магнитные потоки в них обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям. Магнитная проницаемость железа во много раз больше магнитной проницаемости воздуха. Поэтому поток индукции, а следовательно, и индукция магнитного поля в воздушной полости железного кольца практически равны нулю. Магнитное поле концентрируется («сгущается») внутри стенок кольца. На рис. 14-8 показано влияние железного кольца на ход линий индукции в зазоре между полюсами электромагнита.

Пример. Расчет магнитной индукции в зазоре электромагнита.

В железном сердечнике тороидального электромагнита диаметром $D = 0,2$ м сделан зазор шириной $d = 1$ мм. Найти индукцию магнитного поля в зазоре, если обмотка электромагнита содержит $N = 1000$ витков провода, ток в обмотке 1 А, а магнитная проницаемость сердечника при данном значении тока $\mu = 1000$.

Данный электромагнит можно представить как замкнутую магнитную цепь с последовательно включенными элементами – сердечником и зазором. На основании (14-14) можно записать:

$$NI = \Phi(R_1 + R_2). \quad (14-16)$$

Здесь R_1 и R_2 – магнитные сопротивления сердечника и зазора, соответственно, Φ – магнитный поток в электромагните, который одинаков по всему сечению. Согласно формулам (14-5) и (14-11) $R_1 = d/\mu_0 S$ и $R_2 = (\pi D - d)/\mu\mu_0 S$, а $\Phi = BS$. Подставим последние выражения в уравнение (14-16):

$$NI = BS \left(\frac{d}{\mu_0 S} + \frac{\pi D - d}{\mu\mu_0 S} \right).$$

Отсюда найдем индукцию в зазоре:

$$B = \frac{NI}{\frac{d}{\mu_0} + \frac{\pi D - d}{\mu\mu_0}} = \frac{\mu\mu_0 NI}{\pi D + (\mu - 1)d} \approx 0,76 \text{ Тл.}$$

ЛЕКЦИЯ 15

ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

15-1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции.

15-2. Механизмы электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.

15-3. Индукционные эффекты в проводниках, токи Фуко, явление самоиндукции, скин-эффект.

15-1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции

В замкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле, возникает индукционный ток. Индукция токов открыта в опытах М. Фарадея (1831 г.; Майкл Фарадей, английский физик, 1791–1867) и является одним из самых фундаментальных открытий в электродинамике.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции \mathcal{E}_i (работа по перенесению единичного заряда по замкнутому контуру). Весьма замечательным является то, что значение \mathcal{E}_i совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Φ , и определяется лишь скоростью его изменения, т. е. величиной $d\Phi/dt$. Изменение знака производной $d\Phi/dt$ приводит к изменению знака ЭДС индукции \mathcal{E}_i . К этому выводу Фарадей пришел из экспериментальных измерений, в которых обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами.

1-й способ: перемещение соединенной с гальванометром катушки, в магнитном поле, создаваемом другой катушкой с током.

2-й способ: Ток также появляется при движении катушки с током относительно первой катушки, при внесении сердечника в катушку с током, или вследствие изменения силы тока в ней.

В обоих этих случаях гальванометр будет показывать наличие индукционного тока за счет индуцируемой ЭДС:

Закон Фарадея: изменяющееся магнитное поле порождает в замкнутом проводнике ЭДС, т. е. электрическое поле. Таким образом, электрическое поле порождается не только зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.

Правило Э.Х. Ленца. Направление индукционного тока и, соответственно, знак ЭДС индукции \mathcal{E}_i определяются правилом Ленца,

которое получено экспериментально: *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Другими словами, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции. Правило Ленца выражает важное физическое свойство – стремление системы противодействовать изменению ее состояния. Это свойство называют *электромагнитной инерцией*. С учетом правила Ленца ЭДС индукции можно записать в виде:

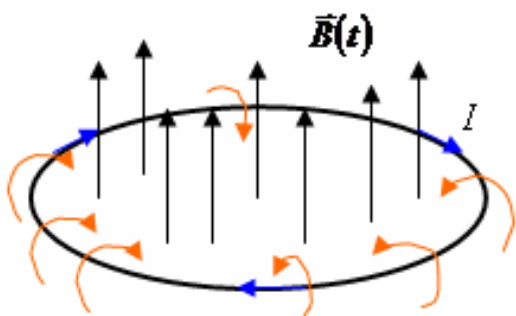


Рис. 15-1

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (15-1)$$

Пример: контур и магнитное поле. Пусть магнитное поле, направленное как показано на рис. 15-1, возрастает, то есть возрастает магнитный поток через контур. Появляющийся в контуре индукционный ток направлен таким образом, чтобы

его собственное магнитное поле (красные стрелки на рисунке) ослабило внешнее поле \vec{B} .

Суть явления электромагнитной индукции состоит в сохранении магнитного потока, проходящего через контур. Это свойство имеет как паразитное влияние особенно при включении высоких напряжений в цепи с катушками индуктивности, так и полезное применение в электротехнике. Например, используется в генераторах переменного тока.

Итак, какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре ЭДС индукции определяется формулой (15-1). Знак минус указывает на то, что направление магнитной индукции и индуцированного вследствие ее изменения тока правилу правого винта не подчиняется. Направление же магнитной индукции, создаваемой постоянным током в контуре от внешнего источника, подчиняется этому правилу (закон Био – Савара – Лапласа).

15-2. Механизмы электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.

Природа индукционного тока – сила Лоренца. Пусть прямой участок проводника движется в поле \vec{B} со скоростью \vec{v} (рис.15-1).

Полная скорость электронов складывается из скорости теплового движения и скорости направленного движения:

$$\vec{v}_{tot} = \vec{v} + \vec{v}_{\text{др}}.$$

Сила Лоренца $\vec{F}_1 = e[\vec{v}_{\text{др}}, \vec{B}]$ только искривляет траекторию движения электрона, а сила $\vec{F}_2 = e[\vec{v}, \vec{B}]$ заставляет заряды смещаться вдоль проводника. За счет последней силы и возникает индукционный ток. Если проводник не замкнут, то возникает разность потенциалов на его концах; если проводник замкнут, то – индукционный ток. Магнитная сила \vec{F} играет роль сторонней силы, т. е. сила Лоренца эквивалентна электрическому полю

$$e\vec{E}_i = e\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (15-2)$$

В замкнутом контуре возникает электродвижущая сила (ЭДС). ЭДС \vec{E}_i , создаваемая возникающим электрическим полем, называется электродвижущей силой индукции: Допустим, подвижный проводник длиной l перемещается равномерно вдоль двух неподвижного изогнутого под прямыми углами проводника (см. рис. 15-2), образуя с ним прямоугольный контур.

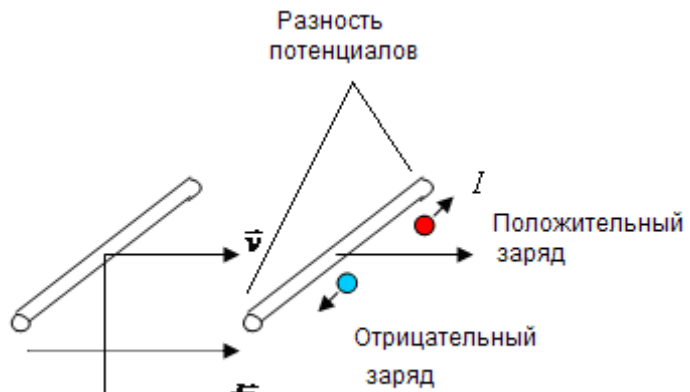


Рис. 15-2

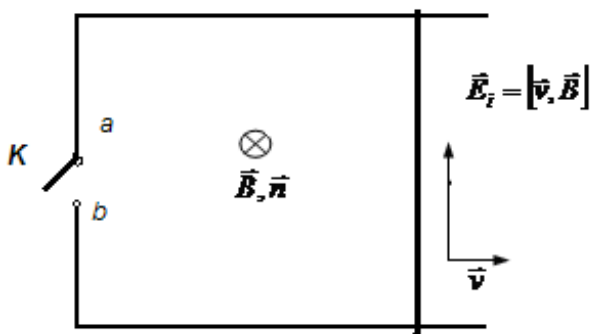


Рис. 15-3

Постоянное однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} направлено перпендикулярно плоскости контура. Если ключ K замкнут, то при непрерывном перемещении подвижного проводника по контуру потечет электрический ток, вызванный электрическим полем, которое определяется форму-

лой (15-2). Если контур (или ключ К) разомкнут, то в точках a и b возникает разность потенциалов, которая вызвана только движущимся проводником и пропорциональна напряженности поля в проводнике: $U = E_i l = vBl$. Скорость проводника $v = dx/dt$, а ЭДС равна:

$$\mathcal{E}_i = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = B \frac{ldx}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Такой простой расчет показывает, что абсолютная величина ЭДС определяется скоростью изменения магнитного потока, пронизывающего контур. Можно показать, что такое количественное соотношение справедливо и для любого направления индукции магнитного поля, а также при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура.

Итак, возбуждение ЭДС индукции при движении контура в постоянном магнитном поле объясняется действием магнитной составляющей силы Лоренца, пропорциональной $\vec{v} \times \vec{B}$, которая возникает при перемещении проводника. Величина ЭДС индукции зависит от скорости изменения магнитного потока, проходящего через контур.

Из рассмотренного выше следует, что существуют две причины возникновения индукционного тока и ЭДС:

- а) магнитное поле постоянно, контур изменяется,
- б) геометрия контура и его положение не изменяются, меняется магнитное поле.

Наблюдаемое в опыте (а) возникновение индукционного тока обусловлено, как показано выше, силой Лоренца. Возникновение индукционного тока в контуре, помещенном в постоянное магнитное поле, свидетельствует о том, что и в этом случае в контуре появляются сторонние силы, которые теперь связаны с изменяющимся во времени магнитным полем. Какова же их природа? Ответ на этот вопрос был дан Максвеллом. Поскольку проводник покоится, то скорость упорядоченного движения электрических зарядов и, следовательно, магнитная сила также равна нулю и уже не может привести заряды в движение. Однако кроме магнитной силы на электрический заряд может действовать только сила со стороны электрического поля, равная $q\vec{E}$. Поэтому остается заключить, что *индукционный ток обусловлен электрическим полем \vec{E} , возникающим при изменении во времени внешнего магнитного поля*. Именно это электрическое поле и ответственно за появление ЭДС индукции в неподвижном контуре. Факт су-

существования тока в замкнутом проводнике указывает на то, что циркуляция напряженности поля по этому проводнику (или по контуру, который данный проводник физически представляет) нулю не равна, так как совершается работа, затрачиваемая на перемещение зарядов и на нагрев проводника. Поэтому электрическое поле потенциальным не является, в отличие от электростатического.

Однако, возникновение электрического поля не связано с наличием проводящего контура, который лишь позволяет обнаружить существование этого поля по возникновению в нем индукционного тока. Появление электрического поля можно обнаружить и по другим его действиям. Например, по поляризации диэлектрика, пробоем конденсатора, ускорению и торможению заряженных частиц и т. п. Во всех этих случаях, электрическое поле совершает работу.

Максвеллом был сделан вывод: *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле*. Отличие от формулировки Фарадея состоит в том, что никаких проводников для обнаружения электрического поля не нужно.

Математическая формулировка закона электромагнитной индукции в понимании Максвелла звучит: *циркуляция вектора напряженности \vec{E} этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру L определяется выражением*

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (15-4)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур L . Поток вектора индукции магнитного поля вычисляется через поверхность, опирающуюся на контур L . Здесь введена частная производная по времени, считая, что выбранный контур в пространстве не меняется.

Тот факт, что циркуляция электрического поля, возбуждаемого переменным во времени магнитным полем, отлична от нуля, означает, что рассматриваемое электрическое поле *не потенциальное*. Оно, как и магнитное поле, является *вихревым*, его линии – *замкнуты*.

В общем случае электрическое поле \vec{E} представляет собой векторную сумму потенциального (поля статических электрических зарядов, циркуляция которого равна нулю) и вихревого (обусловленного изменяющимся во времени магнитным полем) электрических полей. Можно сказать, что во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца:

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right).$$

Какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца, зависит от *выбора системы отсчета*.

Из самого определения работы следует, что сила, действующая в магнитном поле на электрический заряд и перпендикулярная его скорости, не может совершать работы. Однако при движении проводника с током, увлекающего за собой заряды, сила Ампера все же работу совершает. Наглядным подтверждением этого служат электродвигатели. Это противоречие исчезает, если принять во внимание, что движение проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлением электромагнитной индукции. Поэтому наряду с силой Ампера работу над электрическими зарядами совершает и возникающая в проводнике электродвижущая сила индукции. Полная работа сил магнитного поля складывается из механической работы, обусловленной силой Ампера, и работы ЭДС, индуцируемой при движении проводника. Обе работы равны по модулю и противоположны по знаку, поэтому их сумма равна нулю. Действительно, работа амперовой силы при элементарном перемещении проводника с током в магнитном поле равна $\delta A_A = Id\hat{O}$, за это же время ЭДС индукции совершает работу:

$$\delta A_i = \varepsilon_i Idt = -\frac{d\hat{O}}{dt} Idt = -Id\hat{O}. \text{ Тогда полная работа:}$$

$$\delta A_A + \delta A_i = 0.$$

Силы Ампера совершают работу не за счет энергии внешнего магнитного поля, которое может оставаться постоянным, а за счет источника ЭДС, поддерживающего ток в контуре.

15-3. Индукционные эффекты в проводниках, явление самоиндукции, токи Фуко, скин-эффект

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток сквозь контур. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться. Это влечет за собой изменение магнитного потока через контур, а, следовательно, и появление ЭДС индукции. Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению

ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется *самоиндукцией*.

Если в пространстве, где находится контур с током I , нет ферромагнетиков, то поле \vec{B} , а значит, и *полный* магнитный поток Ψ через контур будут пропорциональны силе тока I , и можно написать

$$\Psi = LI, \quad (15-5)$$

где L – коэффициент, называемый индуктивностью контура. Индуктивность L – величина существенно положительная, так как Ψ и I всегда имеют одинаковые знаки. Поток Ψ называют *потокосцеплением*. Индуктивность L зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность является величиной постоянной, не зависящей от силы тока I . Единицей индуктивности является Генри (Гн). Согласно (15-5) индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток через который при токе 1 А равен 1 Вб, значит 1 Гн = 1 Вб/А.

Пример. Найти индуктивность соленоида, пренебрегая краевыми эффектами. Пусть V – объем соленоида, n – число витков на единицу его длины, μ – магнитная проницаемость вещества внутри соленоида.

Согласно (15-5) $L = \Psi/I$. Следовательно, задача сводится к тому, чтобы, задавшись током I , определить потокосцепление Ψ . При токе I магнитное поле в соленоиде $B = \mu\mu_0 nI$. Магнитный поток через один виток соленоида $\Phi = BS = \mu\mu_0 nIS$, а полный магнитный поток, пронизывающий N витков:

$$\Psi = N\Phi = nIBS = \mu\mu_0 n^2 VI,$$

где $V = SI$. Отсюда индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (15-7)$$

Если в переменном магнитном поле находится какой-либо массивный проводник, то вихревое электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля, вызывает в нем индукционный ток (рис. 15-4). Плотность этого тока в какой-либо точке проводника по закону Ома равна $j = \sigma E$. Направление индукционного тока, а следовательно и напряженности поля, наводимого в проводнике, определяются в соответствии с правилом Ленца. Так как линии напряженности

вихревого поля замкнуты, то и линии тока также замыкаются внутри проводника, отчего такие токи и получили название *вихревых токов*.

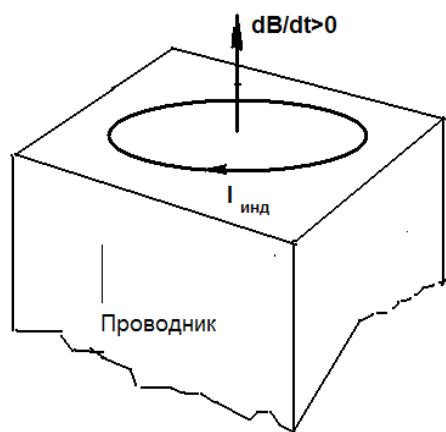


Рис. 15-4

Вихревые токи возникают также при движении массивных проводников в магнитном поле. Взаимодействуя с магнитным полем, вихревые токи вызывают появление сил, действующих на движущееся проводящее тело, которые, согласно закону Ленца, всегда противодействуют движению. Это тормозящее действие позволяет также легко обнаружить вихревые токи, например, в опыте с маятником в виде массивного медного тела, помещенном в магнитное поле. При колебаниях маятник проходит между полюсами электромагнита. При выключенном электромагните маятник колеблется вследствие большой массы с очень малым затуханием, но при включении электромагнита резко останавливается. Силы, вызываемые вихревыми токами и действующие на движущиеся проводники в магнитном поле, используются во многих измерительных приборах (электрические счетчики, электромагнитное успокоение измерительных приборов, тахометры и др.).

В некоторых технических устройствах вихревые токи играют вредную роль. Так, например, в железных сердечниках трансформаторов и вращающихся частях электрических генераторов возникающие вихревые токи вызывают бесполезное нагревание и снижают КПД этих устройств. Для ослабления вихревых токов такие детали изготавливают из тонких листов, разделенных тончайшими слоями изолятора таким образом, чтобы изолирующие прослойки пересекали возможные линии вихревых токов.

Вихревые токи вызывают нагревание проводников. Если внутри катушки с переменным током поместить проводящее тело, например, металлический диск, ориентированный перпендикулярно к оси катушки, то диск можно раскалить до высокой температуры и расплавить.

Вихревые токи широко используются для плавки металлов в индукционных печах. В этом случае их величина должна быть как можно больше, так как, согласно закону Джоуля – Ленца, количество теплоты, выделенной в проводнике R , пропорционально квадрату силы тока. Для увеличения вихревых токов в индукционных печах ис-

пользуются токи высокой частоты, создающие быстроменяющееся электромагнитное поле, что в свою очередь приводит к увеличению индуцированной ими ЭДС.

Протекание переменного тока по проводнику сопровождается его вытеснением к поверхности. Плотность переменного тока оказывается не одинаковой по сечению проводника: наибольшая плотность тока на поверхности и наименьшая на оси проводника. Неравномерность тем больше, чем толще проводник и чем больше частота переменного тока, а при очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое. Это явление получило название *скин-эффекта*.

Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток i имеет направление, указанное на рис. 15-4. Этот ток создает внутри проводника магнитное поле, линии индукции которого лежат в плоскости, перпендикулярной к оси проводника. Предположим, что ток i усиливается. Тогда возрастающая индукция B вызовет появление вихревого электрического поля E (рис. 15-4, а), которое у поверхности проводника направлено так же, как и ток i , а на оси проводника – противоположно току. Это поле, следовательно, будет усиливать ток на поверхности и ослаблять его на оси.

Допустим теперь, что ток i уменьшается. В этом случае ослабевающая индукция B вызовет электрическое поле E , которое будет направлено противоположно по сравнению с первым случаем (рис. 15-4, б), т. е. будет у поверхности противоположно току, а на оси – совпадать с током. В обоих случаях и при усилении, и при ослаблении тока, вихревое электрическое поле на оси проводника препятствует, а на поверхности способствует изменениям тока, а значит, на оси проводника переменный ток слабее, а на поверхности сильнее.

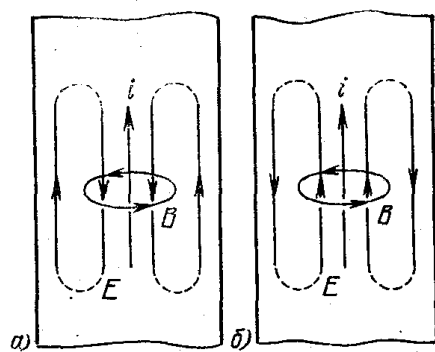


Рис.15-5

ЛЕКЦИЯ 16

ЯВЛЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

16-1. Явление взаимной индукции

*16-2. Энергия контура с током. Энергия магнитного поля.
Плотность энергии магнитного поля.*

16-3. Переходные процессы в электрической цепи при подключении и отключении источника тока.

16-1. Явление взаимной индукции

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 (рис. 16-1), расположенных достаточно близко друг к другу. Если в контуре 1 течет ток I_1 , он создает через контур 2 полный магнитный поток Φ_2 , пропорциональный (при отсутствии ферромагнетиков) току I_1 :

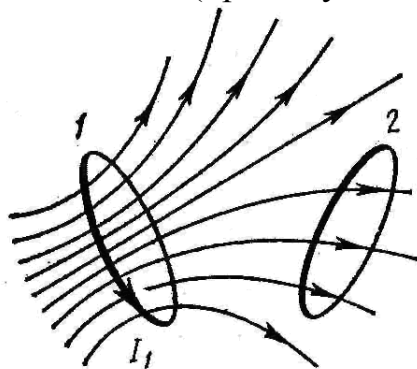


Рис.16-1

$$\hat{\Phi}_2 = L_{21} I_1. \quad (16-1)$$

Совершенно так же, если в контуре 2 течет ток I_2 , он создает через контур 1 полный магнитный поток

$$\hat{\Phi}_1 = L_{12} I_2. \quad (16-2)$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Очевидно,

взаимная индуктивность численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре.

Коэффициенты L_{12} и L_{21} зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряются эти коэффициенты в тех же единицах, что и индуктивность L .

Соответствующий расчет дает (и опыт его подтверждает), что при отсутствии ферромагнетиков коэффициенты L_{12} и L_{21} одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (16-3)$$

Это свойство взаимной индуктивности принято называть *теоремой взаимности*. Благодаря этой теореме можно не делать различия между L_{12} и L_{21} и просто говорить о взаимной индуктивности двух

контуров. Смысл равенства (16-3) в том, что в любом случае магнитный поток Φ_1 сквозь контур 1, созданный током I_1 в контуре 2, равен магнитному потоку Φ_2 сквозь контур 2, созданному таким же током I_2 в контуре 1. Это позволяет значительно упрощать решение задачи о нахождении, например, магнитных потоков. Рассмотрим два примера.

Пример 1. В некоторой плоскости лежат два круговых витка 1 и 2, центры которых совпадают (рис. 16-2). Радиусы витков a_1 и a_2 . В витке 1 течет ток I . Найти магнитный поток Φ_2 охватываемый витком 2, если $a_1 \ll a_2$.



Рис.16-2

Непосредственно вычислить поток Φ_2 сложно, так как сложной является конфигурация самого поля. Использование теоремы взаимности упрощает решение поставленного вопроса. Действительно, пусть тот же ток I по витку 2. Тогда магнитный поток Φ_1 , создаваемый этим током через виток 1, при условии $a_1 \ll a_2$ может быть найден очень просто: достаточно умножить магнитную индукцию B в центре витка ($B = \mu_0 / 2a_2$) на площадь круга πa_1^2 и учесть, что согласно теореме взаимности $\Phi_2 = \Phi_1$. Тогда получим:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi a_1^2}{2a_2}.$$

Пример 2. Пусть контур с током I имеет форму прямоугольника. Как найти магнитный поток Φ через заштрихованную полуплоскость (рис. 16-3), граница которой находится на заданном расстоянии от контура? Предполагается, что эта полуплоскость и контур лежат в одной плоскости.

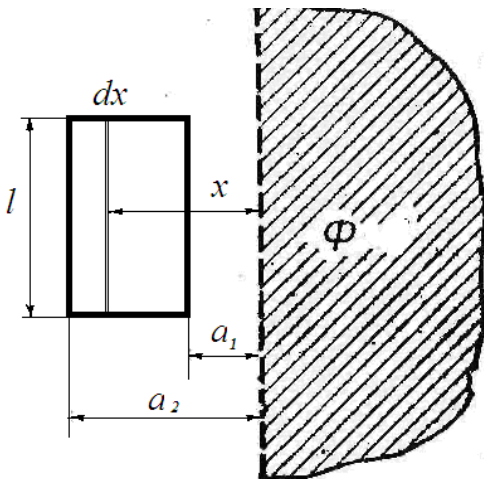


Рис.16-3

Магнитное поле тока I здесь имеет сложную конфигурацию, поэтому непосредственно вычислить интересующий нас поток Φ очень трудно. Однако решение можно упростить, если воспользоваться теоремой взаимности. Представим себе, что ток I течет не по прямоугольному контуру, а вдоль границы полуплоскости, огибая ее на бесконечности.

Магнитное поле, создаваемое этим током в области прямоугольного контура, имеет простую конфигурацию – это поле прямого тока. Поэтому найти магнитный поток Φ сквозь прямоугольный контур достаточно легко (путем несложного интегрирования). А по теореме взаимности искомый поток $\Phi = \Phi'$. После интегрирования получим:

$$\Phi = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_0 I l dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

При наличии ферромагнетиков теорема взаимности перестает выполняться, так как их магнитные проницаемости зависят от токов.

Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре возникает ЭДС индукции. Это явление называют *взаимной индукцией*.

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС, возникающие в контурах 1 и 2, равны соответственно:

$$E_1 = -\frac{d\hat{\Phi}_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad E_2 = -\frac{d\hat{\Phi}_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (16-4)$$

Здесь предполагается, что контуры неподвижны и ферромагнетиков нет.

С учетом явления самоиндукции ток, например, в контуре 1 (рис.16-1) при изменении токов в обоих контурах определяется по закону Ома:

$$R_1 I_1 = E_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

где E_1 – сторонняя ЭДС в контуре 1 (помимо индукционных э.д.с); L_1 – индуктивность контура 1. Аналогичное уравнение можно записать и для определения силы тока I_2 в контуре 2.

Отметим, что на явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов – устройств, предназначенных для преобразования токов и напряжений.

Следует отметить, что в отличие от индуктивности L , которая является существенно положительной величиной, взаимная индуктивность L_{12} – величина алгебраическая, в частности она может быть равна нулю. Это связано с тем, что, например в формуле (16-1), величины Φ_2 и I_1 относятся к разным контурам. Из рис. 16-1 видно, что знак магнитного потока Φ_2 при данном направлении тока I_1 будет за-

висеть от выбора нормали к поверхности, ограниченной контуром 2 (или от выбора положительного направления обхода этого контура).

Положительные направления для токов (и ЭДС) в обоих контурах всегда можно выбрать произвольно (а с положительным направлением обхода контура однозначно – правилом правого винта – связано направление нормали \vec{n} к поверхности, ограниченной контуром, т. е., в конечном счете, знак магнитного потока). Если эти направления выбраны, то величину L_{12} мы должны считать положительной, когда при положительных токах магнитные потоки взаимной индукции через контуры оказываются также положительными, т. е. совпадают по знаку с потоками самоиндукции.

Другими словами, $L_{12} > 0$, если при положительных токах в обоих контурах они «подмагничивают» друг друга, в противном случае $L_{12} < 0$. В частных случаях можно заранее так установить положительные направления обхода контуров, чтобы получить желательный нам знак величины L_{12} (рис. 16-4).

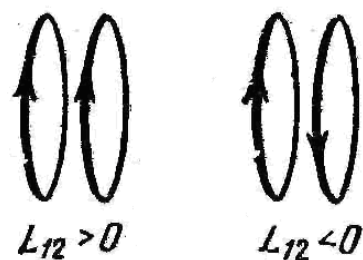


Рис.16-4

16-2. Энергия контура с током. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля

Замкнем неподвижную цепь, содержащую индуктивность L и сопротивление R , на источник тока с ЭДС E_0 . В контуре начнет возрастать ток. Это приводит к появлению ЭДС самоиндукции E_s . Согласно закону Ома $RI = E_0 + E_s$, откуда $E_0 = RI - E_s$.

Найдем элементарную работу, которую совершают сторонние силы (т. е. источник E_0) за время t . Для этого умножим предыдущее равенство на Idt :

$$E_0 Idt = RI^2 dt - E_s Idt.$$

Левая часть – это работа источника сил по перемещению заряда, в правой части – энергия, рассеиваемая в джоулево тепло и слагаемое, обусловленное ЭДС самоиндукции. Учитывая соотношение $E_s = -d\Phi/dt$, запишем

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + Id\Phi.$$

Отсюда видно, что в процессе установления тока, когда поток Φ меняется и $d\Phi > 0$ (если $I > 0$), работа, которую совершает источник

E_0 , оказывается больше выделяемой в цепи джоулевой теплоты. Часть этой работы (дополнительная работа) совершается против ЭДС самоиндукции. Заметим, что после того как ток установится, $d\Phi = 0$ и вся работа источника E_0 будет идти только на выделение джоулевой теплоты.

Итак, дополнительная работа, совершаемая сторонними силами против ЭДС самоиндукции в процессе установления тока:

$$\delta A_{\text{аи}} = Id\hat{O}. \quad (16-5)$$

Это соотношение имеет общий характер. Оно справедливо и при наличии ферромагнетиков, так как при его выводе не вводилось никаких предположений относительно магнитных свойств окружающей среды. Будем считать, что ферромагнетики отсутствуют. Тогда $d\Phi = LdI$ и

$$\delta A_{\text{аи}} = LI dI. \quad (16-6)$$

Проинтегрировав (16-6), получим $A_{\text{доп}} = LI^2/2$. Часть работы сторонних сил идет на увеличение внутренней энергии проводников (с ней связано выделение джоулевой теплоты), а другая часть – на изменение энергии магнитного поля. Таким образом, при отсутствии ферромагнетиков контур с индуктивностью L , по которому течет ток I , обладает энергией

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\hat{O} = \frac{\hat{O}^2}{2I}. \quad (16-7)$$

Эту энергию называют *магнитной энергией тока*. Она может быть целиком превращена во внутреннюю энергию проводников, если отключить источник E_0 так, как показано на рис. 16-5, а: быстро повернуть ключ К из положения б в положение а.

Формула (16-7) выражает магнитную энергию тока через индуктивность и ток (при отсутствии ферромагнетиков). Однако и в случае присутствия ферромагнетиков, энергию можно выразить непосредственно через магнитную индукцию B . Убедимся в этом на простейшем примере длинного соленоида, пренебрегая искажением поля на его торцах (краевыми эффектами). Подстановка в формулу (16-7) выражения $L = \mu\mu_0 n^2 V$ дает

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 I^2 V. \quad (16-8)$$

А так как $nI = B/\mu\mu_0$, то

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}V = \frac{BH}{2}V. \quad (16-9)$$

Эта формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем V (как в нашем случае с соленоидом).

В общей теории показано, что энергию W можно выразить через векторы \vec{B} и \vec{H} в любом случае (но при отсутствии ферромагнетиков) по формуле

$$W = \int \frac{BH}{2} dV. \quad (16-10)$$

Подынтегральное выражение в этом уравнении имеет смысл энергии, заключенной в элементе объемом dV . Отсюда, как и в случае электрического поля, мы приходим к выводу, что магнитная энергия также локализована в пространстве, занимаемом магнитным полем.

Из формул (16-9) и (16-10) следует, что магнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (16-11)$$

Следует учесть, что полученное выражение относится лишь к тем средам, для которых зависимость \vec{B} от \vec{H} линейная, т. е. μ в соотношении $B = \mu\mu_0 H$ не зависит от H . Другими словами, выражения (16-10) и (16-11) относятся только к пара- и диамагнетикам. К ферромагнетикам они не применимы. Отметим также, что магнитная энергия величина положительная. Это следует из последних двух формул.

16-3. Переходные процессы в электрической цепи при подключении и отключении источника тока.

Рассмотрим процесс выключения тока в цепи. Пусть цепь состоит из постоянной индуктивности L , сопротивления R , амперметра A , источника ЭДС E и специального ключа K (рис. 16-5, *а*). Первоначально ключ K находится в нижнем положении (рис. 16-5, *б*), и в цепи течет ток $I = E/R$ (сопротивление источника ЭДС считаем пренебрежимо малым). В момент $t = 0$ быстро повернем ключ K по часовой стрелке из

нижнего положения в верхнее (рис. 16-5, *a*). При этом ключ отсоединил источник от цепи, не нарушая ее замкнутости. Ток через индуктивность L начнет убывать, а это значит, что возникнет ЭДС самоиндукции $E_s = -LdI/dt$, противодействующая убыванию тока. В каждый момент ток в цепи будет определяться законом Ома $I = E_s/R$, или

$$RI = -L \frac{dI}{dt}.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрирование этого уравнения от I_0 до I и от 0 до t дает:

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad (16-12)$$

где τ – постоянная, имеющая размерность времени, $\tau = L/R$. Ее называют постоянной времени (временем релаксации).

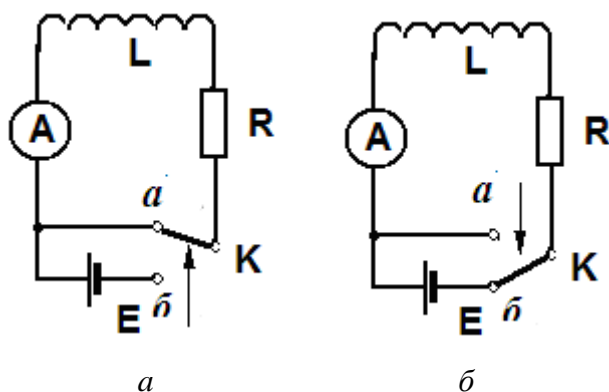


Рис. 16-5

Эта величина характеризует скорость убывания тока. Из (16-12) следует, что τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз. Чем больше значение τ , тем медленнее спадает ток. На рис. 16-6 показан график зависимости $I(t)$ – убывания силы тока со временем (кривая 1).

Теперь рассмотрим процесс изменения тока при подключении цепи к источнику ЭДС. В момент $t = 0$ быстро повернем ключ K против часовой стрелки из верхнего положения в нижнее (рис. 16-5, *б*). Этим самым подключается индуктивность L . Ток в цепи начнет нарастать и опять возникает ЭДС самоиндукции, противодействующая этому нарастанию. Согласно закону Ома $IR = E + E_s$, или:

$$IR = E - L \frac{dI}{dt}.$$

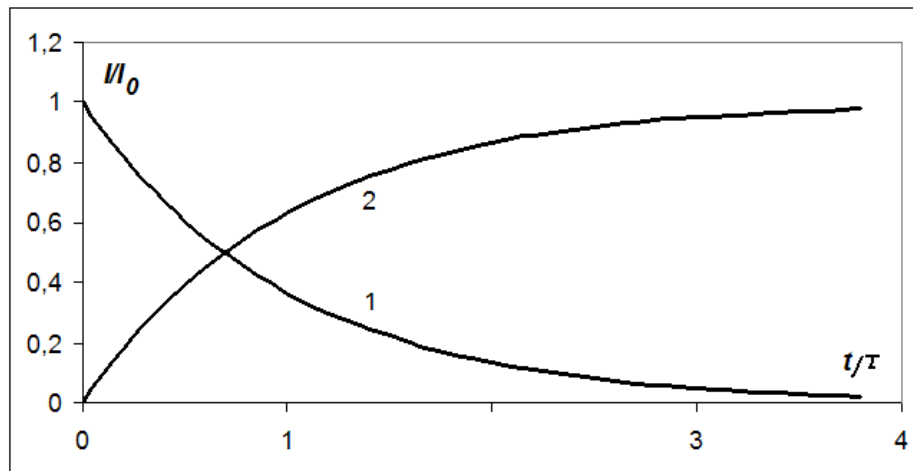


Рис.16-6

Перенесем E в левую часть уравнения и введем новую переменную $u = IR - E$, $du = R dI$. Тогда полученное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau},$$

где $\tau = L/R$ – постоянная времени.

Интегрирование по u от $-E$ до $RI - E$ и по t от 0 до t дает:

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad (16-13)$$

где $I_0 = E/R$ представляет собой установившийся ток (при $t \rightarrow \infty$). Из уравнения (16-13) видно, что быстрота установления тока определяется той же постоянной τ . График зависимости $I(t)$ показан на рис. 16-6 (кривая 2).

ЛЕКЦИЯ 17

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

17-1. Квазистационарные токи.

17-2. Свободные затухающие колебания.

17-3. Вынужденные электрические колебания. Векторная диаграмма. Резонанс при электрических колебаниях.

17-4. Закон Ома для переменного тока. Мощность в цепи переменного тока.

17-1. Квазистационарные токи

Если в каждый момент времени сила тока $I(t)$ одинакова во всех сечениях участка цепи, то такой ток называется *квазистационарным*. В этом случае мгновенные значения силы тока и напряжения для отдельных участков разветвленных электрических цепей будут удовлетворять закону Ома, а значит, и двум правилам Кирхгофа.

Для того чтобы гармонический ток был квазистационарным, должны выполняться два условия.

1) Поскольку электромагнитное поле распространяется со скоростью света, необходимо, чтобы время передачи возмущения по электрической цепи в самую удаленную точку на расстояние l было много меньше периода T синусоидального тока, т. е. $l/c \ll T$.

2) с другой стороны, следует отметить, что сила тока в каждый момент времени определяется скоростью установившегося движения (дрейфа) носителей заряда в проводниках. Для достижения этого необходимо, чтобы время установления стационарного движения в заданном квазистатическом поле, т. е. время релаксации τ скорости зарядов было много меньше периода T колебаний тока в цепи, т. е. $\tau < T$.

Это условие предполагает очень малую инерционность носителей заряда, что практически всегда выполняется в связи с малостью их массы. Оценки показывают, что максимальный размер l электрической цепи, для тока промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц), при которой цепь можно рассматривать как квазистационарную, равен $l \sim 6000$ км.

17-2. Свободные затухающие колебания.

В цепи, содержащей катушку индуктивности L и конденсатор c

емкостью C , могут возникнуть электрические колебания. Поэтому такую цепь называют колебательным контуром. Выясним, каким образом в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания.

Пусть вначале верхняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а нижняя отрицательно (рис. 17-1, *а*). При этом вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. Замкнем ключ K . Конденсатор начнет разряжаться, и через катушку L потечет ток. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки. Этот процесс закончится, когда конденсатор полностью разрядится, а ток в цепи достигнет максимума (рис. 17-1, *б*). С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он прекратится не сразу, его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Ток будет перезаряжать конденсатор, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Наконец, ток прекратится, а заряд на конденсаторе достигнет максимума. С этого момента конденсатор начнет разряжаться опять, ток потечет в обратном направлении и т. д. — процесс будет повторяться.

В контуре при отсутствии сопротивления проводников будут совершаться строго периодические колебания. В ходе процесса периодически изменяются заряд на обкладках конденсатора, напряжение на нем и ток через катушку. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергии электрического и магнитного полей. Если же сопротивление проводников отлично от нуля, то помимо описанного процесса будет происходить преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту. Сопротивление проводников цепи R принято называть активным сопротивлением.

Найдем уравнение колебаний в контуре, содержащем последовательно соединенные конденсатор C , катушку индуктивности L , активное сопротивление R и внешнюю переменную ЭДС E (рис. 17-2). Выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке. Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с выбранным положительным направлением обхода контура. Тогда ток в контуре по определению равен

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

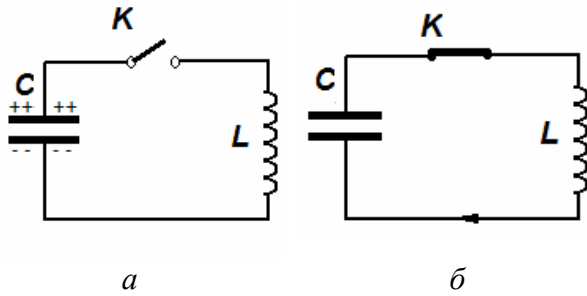


Рис.17-1

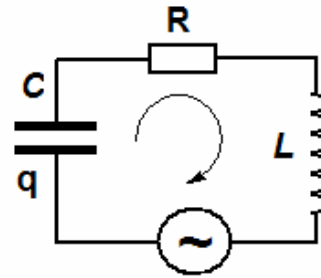


Рис.17-2

Следовательно, если $I > 0$, то и $dq > 0$, и наоборот (знак I совпадает со знаком dq). Согласно закону Ома для участка цепи $IRL2$

$$RI = \Phi_1 - \Phi_2 + E_s + E, \quad (17-1)$$

где E_s э.д.с. самоиндукции. В нашем случае

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{q}{C}$$

(знак q должен совпадать со знаком разности $\Phi_2 - \Phi_1$, так как $C > 0$). Поэтому уравнение (17-1) можно переписать в виде

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E. \quad (17-2)$$

Это и есть *уравнение колебательного контура*. Решив это уравнение относительно $q(t)$, мы можем вычислить напряжение на конденсаторе. Уравнению колебательного контура можно придать иной вид:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}, \quad (17-3)$$

где введены обозначения

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (17-4)$$

Величину ω_0 называют собственной частотой контура, β – коэффициентом затухания. Если $E = 0$, то колебания принято называть свободными. При $R = 0$ они будут незатухающими, при R , не равном 0 – затухающими. Уравнение незатухающих колебаний получается из уравнения (17-2), при $E = 0$ и $R = 0$:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (17-5)$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (17-6)$$

где q_m – амплитудное значение заряда на обкладке конденсатора; ω_0 – собственная частота контура; α – начальная фаза. Значение ω_0 определяется только свойствами самого контура, значения же α – начальными условиями. В качестве таковых можно взять, например, значения заряда q и тока I в момент $t = 0$. Согласно (17-4) $\omega_0 = 1/2\pi(LC)^{1/2}$, поэтому период свободных незатухающих колебаний $T = 2\pi(LC)^{1/2}$ (формула Томсона).

Можно показать, что для затухающих колебаний при $\beta^2 < \omega_0^2$ решение уравнения (17-3) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (17-7)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (17-8)$$

а q_m и α – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. График функции (17-8) показан на рис. 17-3. Видно, что эта функция не периодическая, она определяет затухающие колебания.

Величину $T = 2\pi/\omega$ называют периодом затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (17-9)$$

где T_0 – период свободных незатухающих колебаний. Множитель $q_m e^{\beta t}$ в формуле (17-7) называют амплитудой затухающих колебаний. Зависимость ее от времени показана пунктиром на рис. 17-3. Зная

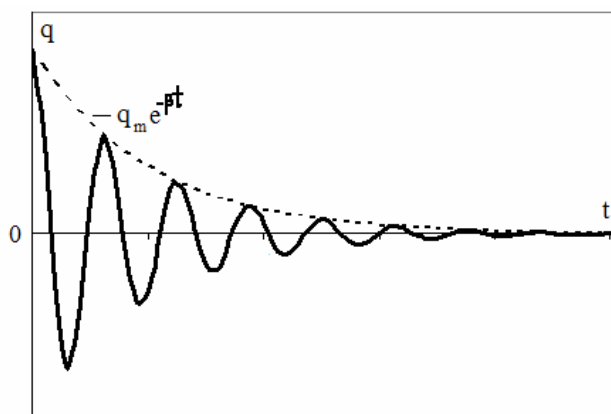


Рис. 17-3

$q(t)$, можно найти напряжение на конденсаторе и ток в контуре. Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (17-10)$$

Ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)]. \quad (17-11)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках к косинусу. Для этого умножим и разделим это выражение на $\omega_0 = (\omega^2 + \beta^2)^{1/2}$, а затем введем угол δ , который определим по формулам:

$$-\frac{\beta}{\omega_0} = \cos \delta, \quad -\frac{\omega}{\omega_0} = \sin \delta. \quad (17-12)$$

После этого выражение (17-11) примет вид:

$$I = \omega q_m e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha + \delta). \quad (17-13)$$

Из (17-12) следует, что угол δ лежит во второй четверти ($\pi/2 < \delta < \pi$). Это означает, что при наличии активного сопротивления R ток в контуре опережает по фазе напряжение (17-10) на конденсаторе более чем на $\pi/2$. Вспомним, что при $R = 0$ опережение $\delta = \pi/2$.

Графики зависимостей $U_C(t)$ и $I(t)$ имеют вид, аналогичный показанному на рис. 17-3 для $q(t)$.

Рассмотрим величины, характеризующие затухание.

1. Коэффициент затухания β и время релаксации τ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Из формулы (17-7) следует, что

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (17-14)$$

2. Логарифмический декремент затухания λ . Он определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период колебания T_i

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t + T)}, \quad (17-15)$$

где a – амплитуда соответствующей величины (заряда, напряжения,

тока, q , U , I). Или иначе, из формул (17-14) и (17-15) получим:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}, \quad (17-16)$$

где N_e – число колебаний за время τ , т. е. за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Если затухание мало ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), то $\omega \approx \omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ и согласно (17-15):

$$\lambda \approx \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (17-17)$$

3. Добротность Q колебательного контура, равная отношению энергии, запасаемой в контуре к величине потерь энергии за период колебаний. Q определяется по формуле:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (17-18)$$

где λ – логарифмический декремент затухания. Чем меньше затухание, тем больше Q . При слабом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), согласно (17-17) добротность будет выражаться формулой:

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17-19)$$

В заключение отметим, что при ($\beta^2 > \omega_0^2$), вместо колебаний будет происходить апериодический разряд конденсатора. Активное сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют критическим. Это сопротивление находится из условия $\omega = 0$:

$$\beta = \omega_0 \Rightarrow R_{кр} \approx 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

17-3. Вынужденные электрические колебания. Векторная диаграмма. Резонанс при электрических колебаниях.

Рассмотрим случай, когда в контур включена внешняя переменная ЭДС E , зависящая от времени по гармоническому закону:

$$E \approx E_m \cos \omega t. \quad (17-20)$$

В данном случае уравнение колебательного контура примет вид:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} q = E_m \cos \omega t,$$

или:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos \omega t. \quad (17-21)$$

Решение этого уравнения, как известно из математики, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения. Нас будут интересовать только установившиеся колебания, т. е. частное решение этого уравнения (общее решение однородного уравнения экспоненциально затухает, и по прошествии некоторого времени оно практически исчезает, обращается в нуль). Можно показать, что решение имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t - \psi), \quad (17-22)$$

где q_m – амплитуда заряда на конденсаторе; ψ – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС (17-20). q_m и ψ определяются только свойствами самого контура и вынуждающей ЭДС. Чтобы определить постоянные q_m и ψ , надо подставить (17-22) в исходное уравнение (17-21) и преобразовать полученное выражение. Для простоты найдем ток $I(t)$ и затем его выражение подставим в исходное уравнение (17-21). Продифференцировав (17-22) по t , получим:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega_0 t - \psi) = \omega q_m \cos(\omega_0 t - \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Запишем это выражение в виде:

$$I = I_m \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

где I_m – амплитуда тока; φ – сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС:

$$I_m = \omega q_m, \quad \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}. \quad (17-23)$$

Найдем I_m и φ . Для этого представим исходное уравнение в виде

$$U_L + U_R + U_C = E_m \cos \omega t,$$

где слева записана сумма напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C . Таким образом, мы видим, что сумма этих напряжений равна в каждый момент внешней ЭДС. Учитывая соотношения (17-23), запишем:

$$\begin{aligned} U_R &= RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi), \\ U_C &= \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \\ U_L &= L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega LI_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (17-24)$$

Из формул (17-24) видно, что U_R находится в фазе с током I , U_C отстает по фазе от I на $\pi/2$, а U_L опережает I на $\pi/2$. Все это можно наглядно представить с помощью *векторной диаграммы*, изобразив амплитуды напряжений

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}, \quad U_{Lm} = \omega LI_m. \quad (17-24, a)$$

и их векторную сумму, равную вектору, модуль которого есть амплитуда ЭДС E_m (рис. 17-4). Из прямоугольного треугольника этой диаграммы легко получить следующие выражения для тока и разности фаз:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (17-25)$$

Резонансными кривыми называют графики зависимостей от частоты ω внешней ЭДС от амплитуд тока I , заряда q на конденсаторе и напряжений U_R , U_C и U_L , определяемых формулами (17-24).

Резонансные кривые для силы тока $I_m(\omega)$ при различных R и одинаковых значениях L и C показаны на рис. 17-5. Из выражения (17-25) для амплитуды силы тока следует, что максимальное значение достигается при $(\omega L - 1/\omega C) = 0$. Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура, $\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$. Максимум при резонансе оказывается тем выше и острее чем меньше коэффициент затухания $\beta = R/2L$. Эти

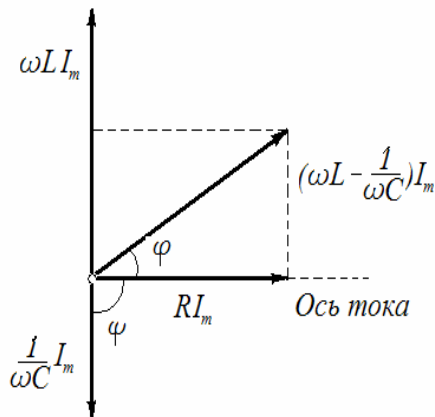


Рис.17-4

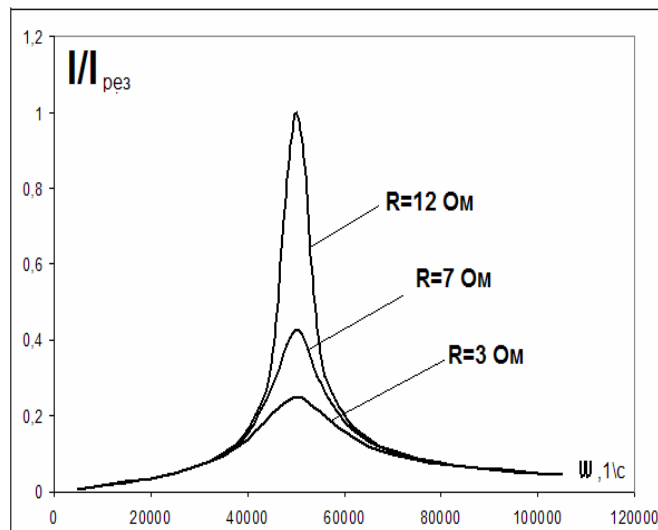


Рис.17-5

Получим уравнение резонансной кривой для заряда на конденсаторе q_m . Амплитуду заряда получим из (17-24) подставив в него выражение для тока из (17-25):

$$q_m = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (17-26)$$

Максимум амплитуды заряда достигается при резонансной частоте, которую получим, приравняв производную по ω от знаменателя в (17-26) к нулю (т. е. найдем минимум этого выражения):

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (17-26)$$

Резонансные кривой для заряда показаны на рис. 17-6 (резонансные кривые для напряжений U_{cm} на конденсаторе согласно (17-24) имеют такой же вид).

Зависимость амплитуды напряжения U_L от частоты внешней ЭДС получается путем подстановки в последнее равенство (17-24) выражения (17-25). Уравнение резонансной кривой для U_R вытекает из первого уравнения (17-25) умножением его на R . Эти зависимости U_c , U_L и U_R сопоставлены на рис. 17-7, они построены при одинаковых значениях E_m .

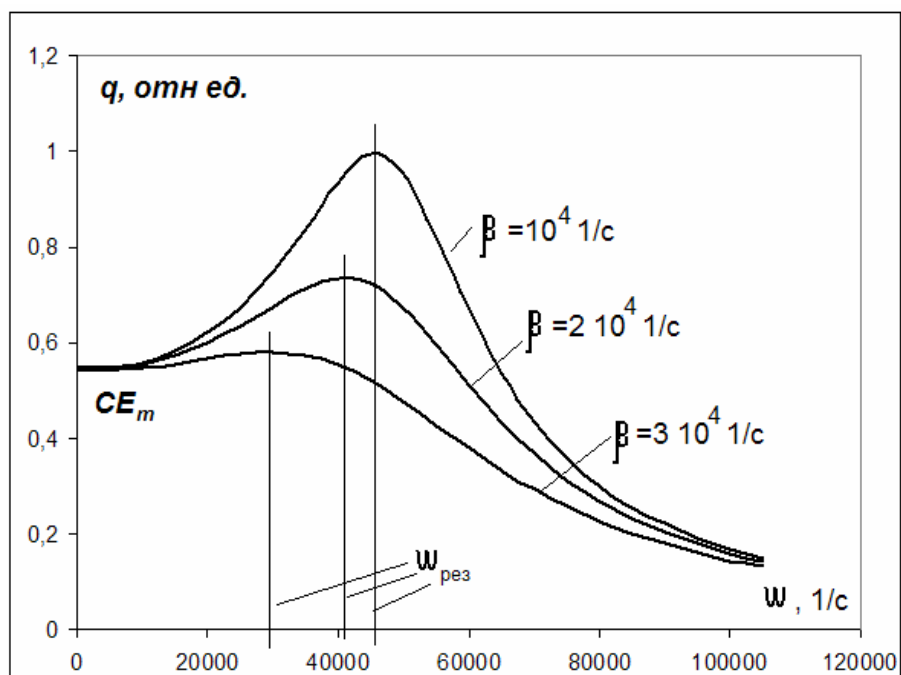


Рис. 17-6

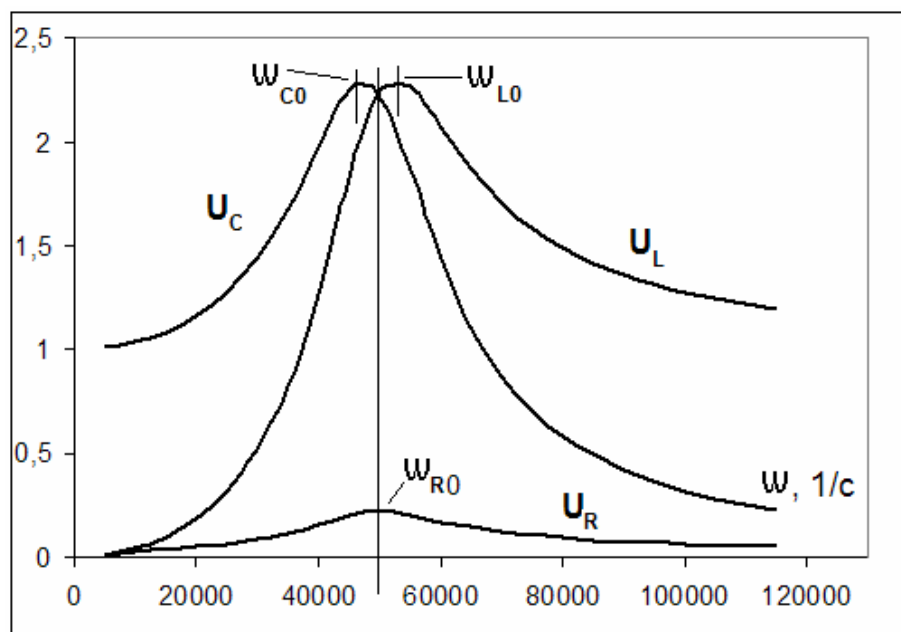


Рис. 17-7

Резонансные частоты для U_R , U_C и U_L определяются следующими формулами:

$$\omega_{R0} = \omega_0, \quad \omega_{C0} = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\beta}{\omega_0} \right)^2}, \quad \omega_{L0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{\beta}{\omega_0} \right)^2}}. \quad (17-27)$$

Чем меньше β , тем ближе резонансные частоты всех величин к значению ω_0 . Форма резонансных кривых определенным образом связана с добротностью Q контура. Особенно простой эта связь оказывается для случая слабого затухания, т. е. при $\beta^2 \ll \omega_0^2$. В этом случае $U_{\text{срез}}/E_m = Q$. Это выражение следует из (17-24) и 17-25) при ω стремящемся к ω_0 . Таким образом, добротность контура (при $\beta^2 \ll \omega_0^2$) показывает во сколько раз максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе (и на индуктивности) превышает амплитуду внешней ЭДС.

Добротность контура связана также с другой важной характеристикой резонансной кривой – ее шириной. Можно показать, что при $\beta^2 \ll \omega_0^2$ добротность можно выразить формулой $Q = \omega_0/\delta\omega$, где ω_0 – резонансная частота; $\delta\omega$ – ширина резонансной кривой на «высоте», равной 0,7 от максимальной, т. е. при резонансе.

Явление резонанса в электрической цепи с последовательным соединением R , L и C – это возбуждение сильных колебаний тока при частоте внешней ЭДС, равной или близкой к собственной частоте колебательного контура. При резонансе угол ϕ на векторной диаграмме (рис. 17-4) равен нулю, напряжения U_C и U_L находятся в противофазе, а их амплитудные значения равны (см. рис. 17-7). Ток в цепи при резонансе определяется только сопротивлением R .

Резонанс в электрической цепи используют для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. На этом основана вся техника радиоприема. Для того чтобы радиоприемник принимал нужную радиостанцию, его необходимо настроить, т. е. изменением C и L колебательного контура добиться совпадения его собственной частоты с частотой электромагнитных волн, излучаемых радиостанцией.

С явлением резонанса связана и опасность: внешняя ЭДС, или напряжение, могут быть малы, однако напряжения на отдельных элементах контура (на емкости или индуктивности) могут достигать огромных значений, опасных для жизни.

17-4. Закон Ома для переменного тока. Мощность в цепи переменного тока.

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать; как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением R , переменного тока. Выражение (17-25) для амплитуды силы тока I_m можно рассматривать как закон Ома для амплитудных значений тока и напряжения. Стоящую в знаменателе этого выражения величину, имеющую размерность сопротивления, обозначают буквой Z и называют полным сопротивлением или *импедансом*:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (17-28)$$

Величину, стоящую в круглых скобках формулы (17-30), обозначают X и называют реактивным сопротивлением:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (17-29)$$

Величину $X_L = \omega L$ называют *индуктивным сопротивлением*, а величину $X_C = 1/\omega C$ — *емкостным сопротивлением*. Заметим, что индуктивное сопротивление растет с увеличением частоты ω , а емкостное — уменьшается. Реактивное сопротивление измеряют в тех же единицах, что и активное, однако между ними существует принципиальное различие. Оно заключается в том, что только активное сопротивление определяет необратимые процессы в цепи, такие, например, как преобразование электромагнитной энергии в джоулеву

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$P(t) = UI = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$P(t) = U_m I_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi).$$

Практический интерес имеет среднее за период колебания значение мощности. Найдем среднее значение от $P(t)$ за период:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi.$$

Это выражение можно привести к иному виду, если принять во внимание, что из векторной диаграммы (см. рис. 17-4) следует $U_m \cos \varphi = RI_m$. Поэтому, среднее значение мощности $P_{\text{ср}} = 1/2(RI_m^2)$. Такую же мощность развивает постоянный ток

$$I = I_m / \sqrt{2}.$$

Величины

$$I = I_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2}.$$

называют действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуированы по действующим значениям тока и напряжения. Выражение средней мощности через действующие значения напряжения и тока имеет вид

$$P_{\text{ср}} = UI \cos \varphi, \quad (17-30)$$

где множитель $\cos \varphi$ принято называть *коэффициентом мощности*. Таким образом, выделяемая в цепи мощность зависит не только от напряжения и силы тока но еще и от сдвига фаз между током и напряжением. При $\varphi = \pi/2$ значение $P_{\text{ср}} = 0$, каковы бы ни были величины U и I . В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от генератора во внешнюю цепь, в точности равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода, и вся энергия бесполезно передается от генератора во внешнюю цепь и обратно.

Зависимость мощности от $\cos \varphi$ необходимо учитывать при проектировании линий электропередачи на переменном токе. Если питаемые нагрузки имеют большое реактивное сопротивление X , то $\cos \varphi$ может быть заметно меньше единицы. В этих случаях для передачи потребителю нужной мощности (при данном напряжении генератора) необходимо увеличить ток I , а это приводит к возрастанию бесполезных потерь энергии в подводящих проводах. Поэтому всегда нужно стремиться распределять нагрузки, индуктивности и емкости так, чтобы $\cos \varphi$ был по возможности близок к единице. Для этого достаточно сделать реактивное сопротивление X как можно меньше, т. е. обеспечить равенство индуктивного и емкостного сопротивлений $(X_L - X_C)$.

ЛЕКЦИЯ 18

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

18-1. Первое уравнение Максвелла

18-2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла.

18-3. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

18-1. Первое уравнение Максвелла

Как было отмечено выше, из явления электромагнитной индукции вытекает, что наличие в пространстве изменяющегося магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля. Экспериментально установленное соотношение между ЭДС и скоростью изменения магнитного потока связывает по существу электрическое поле с временными изменениями вектора \vec{B} и носит общий характер. Общая формулировка закона электромагнитной индукции, была дана Максвеллом: *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле.*

Математически сформулировать закон электромагнитной индукции в такой более общей формулировке можно, если представить ЭДС как работу по перемещению заряда по замкнутому контуру, или как циркуляцию вектора напряженности \vec{E} этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру L :

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS, \quad (18-1)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур L . Поток вектора индукции магнитного поля вычисляется через поверхность, опирающуюся на контур L . Здесь введена частная производная по времени, с учетом того, что выбранный контур в пространстве не меняется. Уравнение (18-1) является первым из системы интегральных уравнений Максвелла электромагнитного поля.

Получим дифференциальную форму этого выражения. Для этого введем векторный оператор $\text{rot} \vec{E}$ (ротор), который определяется как циркуляция вектора \vec{E} по контуру L , когда этот контур стягивается в точку. Ротор вектора \vec{E} выражается через циркуляцию этого вектора (данное соотношение носит название теоремы Стокса):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n} dS.$$

Меняя порядок дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности и используя теорему Стокса, получим:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS, \quad (18-2)$$

Учитывая, что последнее соотношение справедливо для любой произвольной поверхности S , получаем закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (18-3)$$

Это первое из уравнений системы дифференциальных уравнений Максвелла (дифференциальный вид первого уравнения Максвелла).

Тот факт, что циркуляция электрического поля, возбуждаемого переменным во времени магнитным полем, отлична от нуля $\text{rot} \vec{E} \neq 0$, означает, что рассматриваемое электрическое поле потенциальным не является. Оно, как и магнитное поле, является вихревым, его линии замкнуты.

В общем случае электрическое поле \vec{E} представляет собой векторную сумму потенциального (поля статических электрических зарядов, циркуляция которого равна нулю) и вихревого (обусловленного изменяющимся во времени магнитным полем) электрических полей. ЭДС индукции в контуре всегда равна скорости изменения магнитного потока сквозь контур.

18-2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Оказывается, что взаимозависимость электрического и магнитного полей является симметричной. Эта идея была выдвинута Максвеллом. Поскольку меняющееся во времени магнитное поле ($\partial B / \partial t$) создает электрическое поле, следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле ($\partial E / \partial t$) создает магнитное поле. Например, что согласно теореме о циркуляции вектора \vec{H}

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S j_n dS. \quad (18-4)$$

Применим эту теорему к случаю, когда предварительно заряженный плоский конденсатор разряжается через некоторое внешнее сопротивление (рис. 18-1, *a*). В качестве контура Γ возьмем кривую, охватывающую провод. На контур Γ можно натянуть разные поверхности, например S и S' . Через поверхность S течет ток I , а через поверхность S' ток не течет. Получается, что циркуляция вектора \vec{H} зависит от того, какую поверхность мы натягиваем на данный контур, чего не может быть. Однако, поверхность S' «пронизывает» только электрическое поле. Из теоремы Гаусса для потока вектора \vec{D} сквозь замкнутую поверхность следует:

$$\oint_S D_n dS = q \Rightarrow \oint_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (18-2)$$

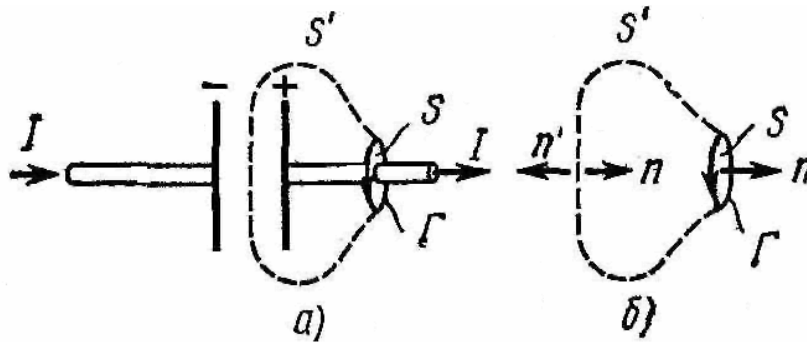


Рис.18-1

С другой стороны, согласно уравнению непрерывности:

$$\oint_S j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (18-3)$$

Сложим отдельно левые и правые части уравнений (18-2) и (18-3), после чего получим

$$\oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (18-4)$$

Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для постоянного тока. Из него видно, что кроме плотности тока проводимости \vec{j} имеется еще одно слагаемое, размерность которого равна размерности плотности тока. Это слагаемое было названо Максвеллом плотностью тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (18-5)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения называют полным током. Его плотность равна

Согласно (18-4) линии полного тока являются непрерывными в отличие от линий переменного тока проводимости (в дифференциальном виде этот интеграл означает, что дивергенция вектора $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ равна нулю). Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Введение полного тока устраняет противоречие, связанное с зависимостью циркуляции вектора \vec{H} от выбора поверхности, обтягивающей контур Γ . Для этого достаточно в правой части уравнения (18-1) вместо тока проводимости ввести полный ток, т. е. величину

$$I_{\text{полн}} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS. \quad (18-7)$$

Правая часть (18-7) представляет собой сумму тока проводимости I и тока смещения $I_{\text{см}}$: $I_{\text{полн}} = I + I_{\text{см}}$. Покажем, что полный ток $I_{\text{полн}}$ будет одинаков как для поверхности S , так и для поверхности S' , которые связаны с одним и тем же контуром Γ . Для этого применим (18-4) к замкнутой поверхности, составленной из поверхностей S и S' (рис. 18-1, б). Учитывая, что для замкнутой поверхности нормаль \vec{n} направлена наружу, запишем $I_{\text{полн}}(S') + I_{\text{полн}}(S) = 0$. Теперь, если обернуть нормаль \vec{n}' для поверхности S' в ту же сторону, что и для S , то первое слагаемое в последнем уравнении изменит знак, и мы получим $I_{\text{полн}}(S') = I_{\text{полн}}(S)$.

Таким образом, теорему о циркуляции вектора \vec{H} , которая была установлена для постоянных токов, можно обобщить для произвольного случая и записать

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS. \quad (18-8)$$

В таком виде теорема о циркуляции вектора \vec{H} справедлива при любых полях, постоянных и переменных. Дифференциальная форма уравнения (18-8):

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (18-9)$$

т. е. ротор вектора \vec{H} определяется плотностью тока проводимости \vec{j} и тока смещения $\partial \vec{D} / \partial t$ в той же точке.

Рассмотрим пример, в котором проявляют себя токи смещения.

Пример. В неограниченной однородной проводящей среде находится металлический шар, которому сообщается положительный электрический заряд (рис. 18-2). Электрические токи, текущие в радиальных направлениях, должны возбуждать магнитное поле. Определить ток смещения и вектор \vec{B} в произвольной точке P .

Вектор \vec{B} не может иметь радиальной составляющей. Если бы это было не так, поток вектора \vec{B} через поверхность сферы S (рис. 18-2) был бы отличен от нуля, что противоречит уравнению теореме Гаусса для \vec{B} . Значит, вектор \vec{B} должен быть перпендикулярен радиальному направлению в точке P . Но это также невозможно, так как все направления, перпендикулярные радиальному, совершенно равноправны, они ничем не выделены. Остается единственное – магнитное поле всюду равно нулю. Отсутствие магнитного поля при наличии электрического тока плотностью \vec{j} означает, что кроме тока проводимости \vec{j} в системе имеется и ток смещения $\vec{j}_{\text{см}}$, причем такой, что полный ток всюду равен нулю, т. е. в каждой точке $\vec{j}_{\text{см}} = -\vec{j}$. Или

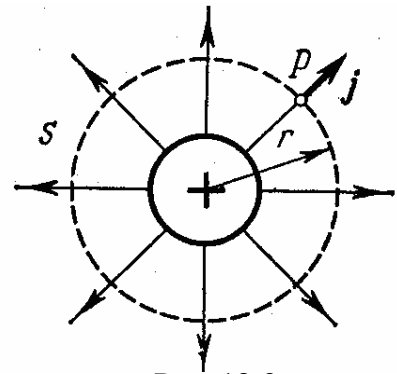


Рис. 18-2

$$j_{\text{см}} = j = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

где $D = q/4\pi r^2$ согласно теореме Гаусса.

18-3. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

С введением тока смещения макроскопическая теория электромагнитного поля была завершена. Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Теория Максвелла не только объяснила все разрозненные явле-

ния электричества и магнетизма (причем с единой точки зрения), но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

До сих пор мы рассматривали отдельные части этой теории. Теперь можно представить всю картину в виде системы фундаментальных уравнений электродинамики, называемых уравнениями Максвелла в неподвижных средах. Этих уравнений четыре. Выше мы уже познакомились с каждым из них в отдельности, а сейчас просто соберем их все вместе. В интегральной форме система уравнений Максвелла имеет следующий вид:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS, \quad \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho dV, \quad (18-10)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS, \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (18-11)$$

где ρ — объемная плотность сторонних зарядов, \vec{j} — плотность тока проводимости. Эти уравнения в сжатой форме выражают всю совокупность наших сведений об электромагнитном поле. Содержание этих уравнений заключается в следующем:

1. Циркуляция вектора \vec{E} по любому замкнутому контуру равна производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром, со знаком минус. При этом под \vec{E} понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю).

2. Поток вектора \vec{D} сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

3. Циркуляция вектора \vec{H} по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

4. Поток вектора \vec{B} сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов \vec{E} и \vec{H} следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих полей приводит к

появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая единое электромагнитное поле.

Для стационарных (статических) полей ($\vec{E} = \text{const}$ и $\vec{B} = \text{const}$) уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q, \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (18-12)$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно, например, постоянное электрическое поле и независимо от него постоянное магнитное поле. Необходимо подчеркнуть, что уравнения Максвелла нельзя «вывести», они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения экспериментальных данных. Эти постулаты играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики.

Уравнения (18-10) и (18-11) можно представить в дифференциальной форме, т. е. в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = \rho, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (18-13)$$

Из первой пары уравнений (18-13) следует, что электрическое поле может возникнуть от электрических зарядов, как сторонних, так и связанных. Это следует из уравнения $\text{div} \vec{D} = \rho$. Если учесть, что $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ и $\text{div} \vec{P} = -\rho_{\text{св}}$, то $\text{div} \vec{E} = (\rho + \rho_{\text{св}}) / \epsilon_0$. Наряду с этим, поле \vec{E} создается, когда меняется во времени магнитное поле (выражение закона электромагнитной индукции Фарадея). Согласно второй паре уравнений (18-13) магнитное поле \vec{B} может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно (это следует из уравнения $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$). Никаких источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (по аналогии их называют магнитными зарядами), в природе не существует, это следует из уравнения $\text{div} \vec{B} = 0$.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме путем их решения позволяют найти сами поля \vec{E} и \vec{B} . Для этого уравнения Мак-

свелла дополняют *граничными условиями* и *материальными уравнениями*. Граничные условия имеют вид:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (18-16)$$

В (18-16) первое и последнее условия относятся к случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости. Эти граничные условия справедливы как для постоянных, так и для переменных полей.

Фундаментальные уравнения Максвелла еще не составляют полной системы уравнений электромагнитного поля. Этих уравнений недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов. Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, материальные уравнения имеют следующий вид:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (18-17)$$

где ϵ , μ , σ – известные постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости и удельная электропроводность), \vec{E}^* – напряженность поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

ЛЕКЦИЯ 19

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

19-1. Относительный характер электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля.

19-2. Волновое уравнение.

19-3. Плоская электромагнитная волна и ее свойства.

19-1. Относительный характер электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля

До сих пор мы рассматривали электрическое и магнитное поля раздельно, не обнаруживая никакой видимой связи между ними. Это возможно было сделать лишь потому, что оба поля являлись статическими. Электрическое и магнитное поля всегда должны рассматриваться как единое электромагнитное поле. Оказывается, что электрическое и магнитное поля являются в некотором смысле различными компонентами единого физического объекта, который называют электромагнитным полем.

Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер: такое деление зависит от системы отсчета, в которой рассматриваются явления. При этом поле, постоянное в одной системе отсчета, в общем случае оказывается переменным в другой системе.

Можно привести некоторые примеры.

1. Заряд движется в инерциальной системе отсчета с постоянной скоростью. В этой системе отсчета мы будем наблюдать как электрическое, так и магнитное поля данного заряда, причем оба поля переменные во времени. Если же перейти в другую инерциальную систему, которая перемещается вместе с зарядом, то в ней заряд покоится и мы будем наблюдать только электрическое поле.

2. Два одинаковых заряда движутся в К-системе отсчета навстречу друг другу с одинаковой скоростью. В этой системе отсчета мы будем наблюдать и электрическое, и магнитное поля, оба переменные. Найти такую систему, где наблюдалось бы только одно из полей, в данном случае нельзя.

3. В некоторой системе отсчета существует постоянное неоднородное магнитное поле (например, поле неподвижного постоянного

магнита). Тогда в другой системе, движущейся относительно первой системы, мы будем наблюдать переменное магнитное поле и, как будет показано ниже, электрическое поле.

Таким образом, соотношения между электрическим и магнитным полями оказываются разными в различных системах отсчета. Теперь выясним следующий важный вопрос: какие инварианты существуют при переходе от одной системы отсчета к другой. Источником поля (электрического и магнитного) является заряд. Поэтому, рассмотрим, как ведут себя при смене систем отсчета сам электрический заряд q и теорема Гаусса для вектора \vec{E} .

В настоящее время имеются исчерпывающие доказательства того, что полный заряд изолированной системы не меняется при изменении движения носителей заряда. В качестве доказательства можно привести нейтральность газа, состоящего из молекул водорода. В этих молекулах электроны движутся со значительно большими скоростями, чем протоны. Поэтому, если бы заряд зависел от скорости, то заряды электронов и протонов не были бы скомпенсированы — газ оказался бы заряженным. Наблюдения же никакого заряда не обнаружили (с точностью до 10^{-20} !). Еще один пример — нагрев вещества. Поскольку масса электрона значительно меньше массы ядер, скорость электронов при нагреве должна увеличиваться больше, чем у ядер. И если бы заряд зависел от скорости, то при нагреве вещество становилось бы заряженным. Ничего подобного в опытах не наблюдалось.

Наряду с этим, если бы заряд электрона зависел от скорости, то в ходе химических реакций суммарный заряд вещества должен был бы меняться, поскольку средние скорости электронов в веществе зависят от его химического состава. Расчет показывает, что даже небольшая зависимость заряда от скорости приводила бы даже в простейших химических реакциях к огромным электрическим полям. Но и здесь ничего похожего не наблюдалось.

И наконец, расчет и работа всех современных ускорителей заряженных частиц основаны на предположении, что заряд частиц не меняется при изменении их скорости.

На основании сказанного выше можно прийти к выводу, что заряд любой частицы — это релятивистски инвариантная величина, не зависящая ни от скорости частицы, ни от выбора системы отсчета.

Опыт показывает, что теорема Гаусса $\oint_S E_n dS = q / \varepsilon_0$ справедлива

не только для покоящихся зарядов, но и для движущихся. При этом поверхностный интеграл должен быть вычислен для одного и того же момента времени в данной системе отсчета. Кроме того, поскольку различные инерциальные системы отсчета физически эквивалентны друг другу (согласно принципу относительности), то можно утверждать, что теорема Гаусса справедлива во всех инерциальных системах отсчета.

При переходе от одной системы отсчета к другой поля \vec{E} и \vec{B} определенным образом преобразуются. Законы этого преобразования устанавливаются в специальной теории относительности, причем довольно сложным образом. По этой причине выводы здесь не приводятся, а основное внимание уделим содержанию этих законов и на вытекающих из них следствиях. Пусть имеются две инерциальные системы отсчета: К-система и движущаяся относительно нее со скоростью v_0 система К'. В некоторой пространственно-временной точке К-системы отсчета известны значения полей \vec{E} и \vec{B} . Какими будут значения полей \vec{E}^1 и \vec{B}^1 в той же самой пространственно-временной точке в К'-системе отсчета? Одной и той же пространственно-временной точкой называют такую, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца. Ответ на этот вопрос дает теория относительности, которая показывает, что законы *преобразования* полей выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \vec{E}_l^1 &= \vec{E}_l, \quad \vec{B}_l^1 = \vec{B}_l, \\ E_t^1 &= \frac{\vec{E}_t + \vec{v}_0 \times \vec{B}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{B}_t^1 = \frac{\vec{B}_t - \frac{v_0 \times \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (19-1)$$

Здесь символами t и l отмечены поперечные и продольные (по отношению к вектору v_0) составляющие электрического и магнитного полей, соответственно, $\beta = v_0/c$, c – скорость света в вакууме ($c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$).

Из уравнений (19-1) видно, что каждый из векторов \vec{E}^1 и \vec{B}^1 выражается как через \vec{E} , так и через \vec{B} . Это свидетельствует о единой природе электрического и магнитного полей. Каждое из них в отдель-

ности не имеет абсолютного смысла: об электрическом и магнитном полях можно говорить лишь с обязательным указанием системы отсчета, в которой эти поля рассматриваются.

Из формул преобразования полей (19-1) следует, что возникновение магнитного поля является чисто релятивистским эффектом, следствием наличия в природе предельной скорости c , равной скорости света в вакууме. Если бы эта скорость была бесконечной (соответственно и скорость распространения взаимодействий), то *никакого магнетизма вообще не могло бы существовать*. В самом деле, рассмотрим свободный электрический заряд. В системе отсчета K , где он покоится, существует только электрическое поле. А это значит согласно приведенным выше преобразованиям, что в любой другой K' -системе отсчета, если бы $c \rightarrow \infty$, никакого магнитного поля \vec{B}^1 не возникало бы. Оно возникает только из-за конечности c , т. е. в конечном счете вследствие релятивистского эффекта.

Релятивистская природа магнетизма является универсальным физическим фактом, и его происхождение обусловлено отсутствием магнитных зарядов. В отличие от большинства релятивистских явлений магнетизм во многих случаях обнаруживается сравнительно легко, например по магнитному полю проводника с током. Причина подобных благоприятных обстоятельств обусловлена тем, что магнитное поле может создаваться очень большим числом движущихся зарядов при условии почти полного исчезновения электрического поля из-за очень точного баланса числа электронов и протонов в проводниках. В этих случаях магнитное взаимодействие оказывается преобладающим. Почти полная компенсация электрических зарядов и позволила изучить релятивистские эффекты (т. е. магнетизм).

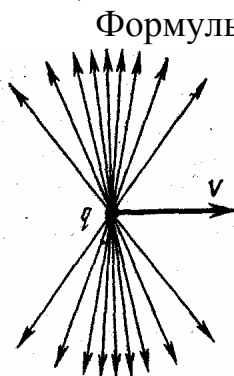


Рис.19-1

Формулы преобразования полей представляют большой интерес прежде всего в том отношении, что выражают собой удивительные свойства электромагнитного поля. Например, задача о нахождении поля равномерно движущегося точечного заряда. Эта задача может быть решена путем преобразования чисто кулоновского поля, которое наблюдается в системе отсчета, связанной с самим зарядом. Расчет с применением преобразований 19-1, показывает, что линии E поля *свободно* движущегося точечного заряда q имеют вид, показан-

ный на рис. 19-1, где v – скорость заряда.

Изображенная здесь картина соответствует мгновенной конфигурации электрического поля. Вектор \vec{E} в произвольной точке P системы отсчета направлен вдоль радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки, где находится заряд в данный момент, в точку P . Модуль вектора \vec{E} определяется формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \quad (19-2)$$

где $\beta = v/c$, θ – угол между радиусом-вектором \vec{r} и вектором \vec{v} скорости заряда.

Электрическое поле «сплющивается» в направлении движения заряда (см. рис. 19-2), причем тем сильнее, чем ближе скорость заряда v к скорости c . Следует также иметь в виду, что поле, показанное на этом рисунке, «перемещается» вместе с зарядом. Вследствие этого поле \vec{E} в системе отсчета, относительно которой заряд движется, изменяется со временем. Зная поле \vec{E} , можно найти и поле \vec{B} в этой же системе отсчета:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{v} \times \vec{r})}{r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \quad (19-3)$$

При $v \ll c$ формулы (19-2) и (19-3) переходят в классические выражения, соответствующие точечным зарядам.

19-2. Волновое уравнение

Важнейшим выводом из уравнений Максвелла для электромагнитного поля является волновое уравнение для векторов напряженности электрического и магнитного полей. Перепишем уравнения Максвелла (18-13) для однородной, изотропной и непроводящей среды, не обладающей сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами, с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Тогда дифференциальные уравнения примут вид:

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{H} = 0. \quad (19-4)$$

Перепишем (19-4) в проекциях, используя определение ротора:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{19-5}$$

Из первого уравнения второго столбца следует:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right). \tag{19-6}$$

Подставив значения $\partial H_y/\partial t$ и $\partial H_z/\partial t$ из второго и третьего уравнения первого столбца (19-2), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\mu\mu_0} \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

Выразив из четвертого уравнения первого столбца (19-2) производную $\partial E_x/\partial x$, получим:

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}.$$

т. е. E_x удовлетворяет волновому уравнению, которое имеет вид:

$$\Delta E_x - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \tag{19-7}$$

Аналогично можно показать, что волновому уравнению удовлетворяют также остальные проекции векторов \vec{E} и \vec{H} . Таким образом, из уравнений Максвелла следует, что напряженности \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (19-8)$$

Отсюда следует, что, переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде *электромагнитной волны*. Фазовая скорость электромагнитной волны $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$, где ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для вакуума $\epsilon = \mu = 1$ и $v = c$. Относительные магнитные проницаемости всех неферромагнитных сред, т. е. диа- и парамагнетиков, очень мало отличаются от единицы. Поэтому с большой степенью точности можно считать, что в таких средах фазовая скорость электромагнитных волн

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (19-9)$$

19-3. Плоская электромагнитная волна и ее свойства

Одним из решений полученного выше волнового уравнения является функция, описывающая плоскую гармоническую электромагнитную волну, которая обладает некоторыми специфическими свойствами. Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны имеет вид, например, для проекций на оси y и z :

$$E_y = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad H_z = H_0 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Здесь ω – циклическая частота, k – волновое число, α – начальная фаза. Согласно принципу суперпозиции любую электромагнитную волну можно представить в виде суммы монохроматических плоских электромагнитных волн, отличающихся в общем случае как по амплитудам электрического и магнитного полей, так и по фазам. Эти волны описывают распространение в пространстве колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} . Плоскими они называются потому, что *волновой фронт* (поверхность одинаковой фазы) представляет собой плоскость, которая перпендикулярна направлению распространения волны.

1. Из уравнений Максвелла вытекает вывод о том, что векторы \vec{E} и \vec{H} электромагнитной волны *всегда взаимно перпендикулярны*. Кроме того, они лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т. е. вектору \vec{v} скорости волны. Следовательно, электромагнитные волны являются *поперечными*.

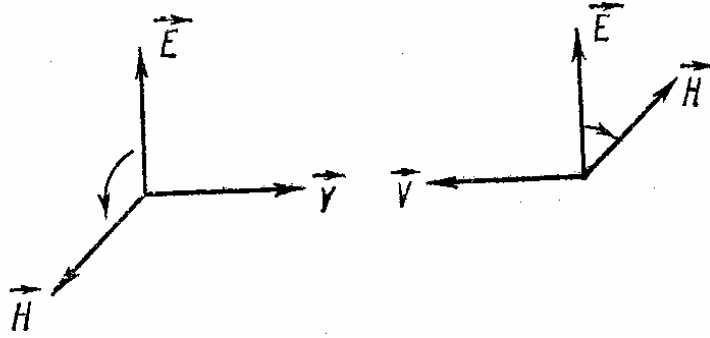


Рис. 19-2

Взаимная ориентация тройки векторов \vec{E} , \vec{H} и \vec{U} удовлетворяет следующему правилу: из конца вектора \vec{U} вращение от \vec{E} к \vec{H} по кратчайшему расстоянию видно происходящим против часовой стрелки (рис. 19-2). Т. е. вектор \vec{U} по направлению совпадает с векторным произведением \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{U} = \frac{v}{EH} \vec{E} \times \vec{H}.$$

Покажем, что электромагнитные волны являются поперечными, а вектора \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны. Для этого рассмотрим, например, плоскую волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси OX . В этом случае векторы \vec{E} и \vec{H} и их проекции на оси координат зависят от координаты x и времени t , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому из первых и четвертых уравнений обоих столбцов (19-2) следует, что

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0.$$

Из этих соотношений видно, что $E_x = 0$ и $H_x = 0$ (константами эти величины быть не могут, так как поля электромагнитной волны нестационарны и неоднородны). Таким образом, для поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси OX , E_x и $H_x = 0$, т. е.

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_z \vec{j}, \quad \vec{H} = H_x \vec{i} + H_z \vec{j}.$$

Из уравнений Максвелла также следует еще одно свойство плоской электромагнитной волны (доказательство опускаем): взаимно перпендикулярные векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются в одной фазе, т. е. они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений. Причем мгновенные значения \vec{E} и \vec{H} в любой момент времени связаны соотношением:

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E. \quad (19-10)$$

Это соотношение получено для плоской волны, однако оно справедливо и для любой бегущей электромагнитной волны, независимо от формы ее волновых поверхностей.

ЛЕКЦИЯ 20

ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

20-1. Энергия электромагнитных волн.

20-2. Поток энергии. Вектор Умова – Пойнтинга.

20-3. Импульс электромагнитных волн

20-1. Энергия электромагнитных волн.

Электромагнитное поле обладает энергией. Поэтому распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии в поле, подобно тому, как распространение упругих волн в веществе; связано с переносом механической энергии.

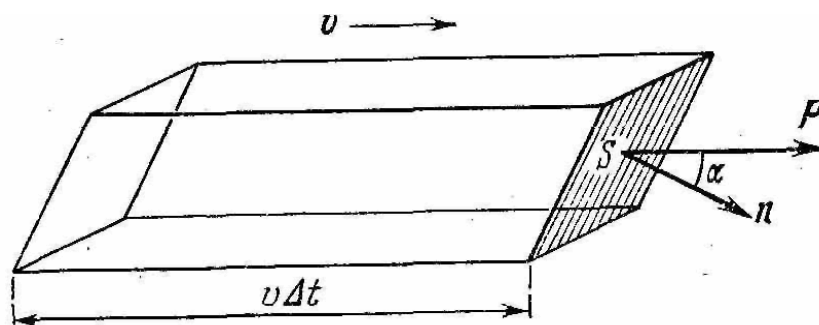


Рис.20-1

Известно, что объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного поля:

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2). \quad (20-1)$$

Рассмотрим в поле электромагнитной волны произвольную площадку S (рис. 20-1) и вычислим энергию ΔW , переносимую электромагнитной волной через эту площадку за малое время Δt . Для этого в пространстве, в котором распространяется волна, построим параллелепипед, ребра которого параллельны скорости распространения волны v и имеют длину Δv , а площадка S является его основанием (рис. 20-3). Объем этого параллелепипеда равен $V = S v \Delta t \cos \alpha$, где α – угол между нормалью n к площадке S и скоростью v . Так как за время Δt волна проходит расстояние $v \Delta t$, то очевидно, что через площадку S пройдет энергия ΔW , заключенная внутри параллелепипеда, которая

равна $\Delta W = u \Delta V = u S v \Delta t \cos \alpha$. Напряженности E и H в электромагнитной волне связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H.$$

Поэтому (20-1) можно представить в виде:

$$u = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E H.$$

Учитывая, что:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

получим:

$$\Delta W = E H S \Delta t \cos \alpha.$$

Следовательно, энергия, проходящая через площадку S в единицу времени, равна:

$$\left. \frac{\Delta W}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{\partial W}{\partial t} = E H S \cos \alpha. \quad (20-2)$$

20-2. Поток энергии. Вектор Умова – Пойнтинга

Полученный результат (20-2) можно представить в более удобной форме. Введем вектор потока электромагнитной энергии, определяемый следующим образом:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (20-3)$$

В электромагнитной волне \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг к другу, и поэтому поток электромагнитной энергии $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$. Направление же вектора \vec{P} перпендикулярно к \vec{E} и \vec{H} , т. е. совпадает с направлением скорости распространения волны. Тогда (20-2) можно представить в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P_n S. \quad (20-4)$$

Здесь $P_n = P \cos \alpha$ есть проекция вектора \vec{P} на направление нормали n к площадке S .

Таким образом, движение энергии в электромагнитном поле можно охарактеризовать при помощи потока энергии \vec{P} . Его направ-

ление дает направление движения энергии. *Модуль потока энергии равен энергии, проходящей за единицу времени через поверхность с единичной площадью, перпендикулярной к направлению движения энергии.* Вектор потока электромагнитной энергии \vec{P} называют *вектором Умова – Пойнтинга*. Если мы представим себе линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{P} (линии вектора потока энергии), то эти линии совпадут с направлением, вдоль которых распространяется энергия электромагнитного поля. С другой стороны, линии, вдоль которых движется энергия света, в оптике называют *лучами*. Поэтому, так как свет представляет собой также электромагнитные волны, то лучи света это и есть линии вектора потока энергии световых электромагнитных волн.

За единицу времени волна проходит путь в вакууме, равный c . Объем, занимаемый волной, проходящей через единичную площадку за 1 секунду, также равен c . Тогда модуль потока энергии волны можно связать с объемной плотностью энергии соотношением:

$$P = uc \cos \alpha, \quad (20-5)$$

где α – угол между нормалью к площадке и вектором потока энергии (рис. 20-1).

Исходя из уравнений Максвелла, можно доказать важную теорему о движении энергии в электромагнитном поле, которая получила название *теоремы Пойнтинга*. Выделим внутри произвольной среды некоторый объем V , ограниченный поверхностью S (рис. 20-2).

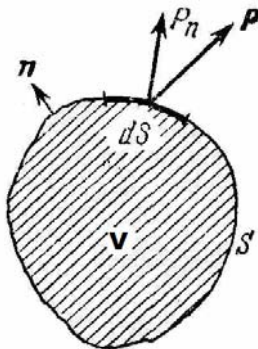


Рис. 20-2

Обозначим полную энергию, заключенную внутри объема V , через W . Тогда

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_S P_n dS. \quad (20-6)$$

Здесь P_n – нормальная к поверхности составляющая вектора Умова – Пойнтинга, выражаемого формулой (20-3), а интегрирование производится по всей замкнутой поверхности S . При этом положительным считается направление внешней нормали n (рис. 20-4),

т. е. поток вектора \vec{P} считается положительным, если линии потока энергии P выходят изнутри объема наружу. Величина $-\partial W/\partial t$ есть уменьшение полной энергии внутри объема за единицу времени. Согласно закону сохранения энергии она должна равняться той энергии,

которая выходит через поверхность S за единицу времени наружу. Отсюда следует, что энергия, выходящая через поверхность S за единицу времени, выражается потоком вектора \vec{P} через замкнутую поверхность S , которая ограничивает объем V . Величину же P_n можно рассматривать как энергию, которая проходит через единицу поверхности в единицу времени.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления потока электромагнитной энергии.

Пример 1. Выделение теплоты в проводнике.

Пусть по прямому проводу круглого сечения радиусом a течет ток I (рис. 20-3). Поскольку провод обладает сопротивлением, то вдоль него действует некоторое электрическое поле \vec{E} . Такое же значение \vec{E} и \vec{U} на поверхности провода в вакууме. Кроме того, наличие тока порождает и магнитное поле. По теореме о циркуляции вектора \vec{H} вблизи поверхности провода $2\pi aH = I$, $H = I/2\pi a$. Векторы \vec{E} и \vec{H} расположены так, что вектор Пойнтинга направлен внутрь провода нормально к его боковой поверхности (рис. 20-3).

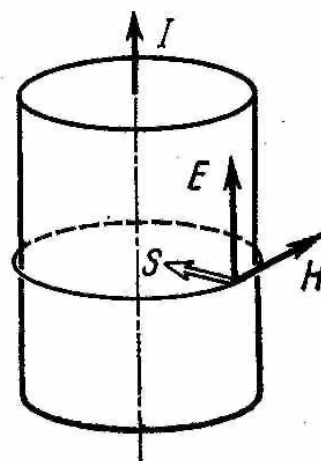


Рис. 20-3

Следовательно, электромагнитная энергия втекает внутрь провода из окружающего пространства! Определим поток электромагнитной энергии сквозь боковую поверхность участка провода длины l :

$$EH2\pi al = 2\pi aHEl = IU = I^2 R El,$$

где U — это разность потенциалов на концах данного участка, R — его сопротивление. Таким образом, поток электромагнитной энергии поступает в провод извне и целиком превращается в джоулеву теплоту.

Пример 2. Распространяющаяся электромагнитная волна.

Пусть плоская электромагнитная волна, распространяется в вакууме вдоль оси X . Тогда напряженности электрического и магнитного полей в какой-либо точке x выражаются формулами: $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$, $H = H_0 \sin(\omega t - kx)$, где $k = 2\pi/\lambda$. Поэтому, мгновенное значение вектора Умова — Пойнтинга равно $P = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx)$. Однако на опыте мы имеем дело не с мгновенным значением потока энергии, а со средним его значением во времени P . Среднее значение за период

$\sin^2 x = 1/2$, кроме того, для вакуума ($\varepsilon = \mu = 1$). Поэтому:

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \Rightarrow P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

Это и есть средняя энергия, проходящая через единицу поверхности в единицу времени, или *интенсивность* волны. Полученный результат показывает, что энергия, переносимая электромагнитной волной, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

20-3. Импульс и масса электромагнитных волн

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Это можно показать на следующем примере. Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность слабо проводящего тела, значения ε и μ которого равны единице (рис. 20-4). Электрическое поле волны возбуждает в теле ток плотности $j = \sigma E$. Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле:

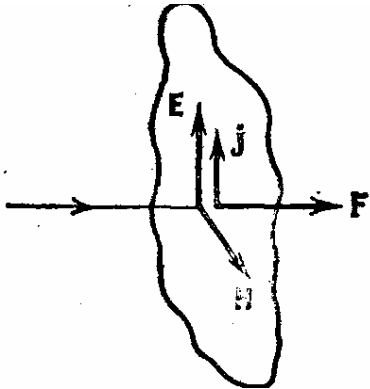


Рис. 20-4

$$F_{уд} = IdlB \frac{1}{Sdl} = jB \Rightarrow \vec{F}_{уд} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

Направление этой силы, как видно из рис. 20-4, совпадает с направлением распространения волны. Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной dl сообщается в единицу времени импульс

$$dK = F_{уд} dl = jBdl \quad (20-6)$$

(векторы \vec{j} и \vec{B} взаимно перпендикулярны). В этом же слое в единицу времени поглощается энергия

$$dW = jEdl, \quad (20-7)$$

выделяющаяся в виде тепла.

Возьмем отношение (20-6) и (20-7):

$$\frac{dK}{dW} = \frac{K}{W} = \frac{B}{E} = \frac{\mu_0 \left(\frac{\sqrt{\epsilon_0} E}{\sqrt{\mu_0}} \right)}{E} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда следует, что электромагнитная волна, несущая энергию W , обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (20-8)$$

Такая же связь между энергией и импульсом имеет место для частиц с нулевой массой покоя. Это не удивительно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов, т. е. частиц, масса покоя которых равна нулю. Из (20-8) следует, что плотность импульса (т. е. импульс единицы объема) электромагнитного поля равна

$$K_{\text{уд}} = \frac{1}{c} u. \quad (20-9)$$

С учетом (20-5) плотность импульса можно выразить через вектор Умова – Пойнтинга:

$$\vec{K}_{\text{уд}} = \frac{1}{c^2} \vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (20-10)$$

Отметим, что при переносе энергии любого вида плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2 . Пусть падающая нормально на некоторое тело электромагнитная волна полностью поглощается этим телом. Тогда единице поверхности тела сообщается в единицу времени импульс волны, заключенный в объеме (например, цилиндре) с площадью основания, равной единице, и высотой c . Согласно (20-9) этот импульс равен $(u/c)c = u$. Вместе с тем импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению p на поверхность. Следовательно, в случае полностью поглощающей поверхности $p = u$. Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Величина давления, вычисленная по формуле (20-9), оказывается очень малой. Например, на расстоянии 1 м от источника света силой в 10^6 Кд составляет всего лишь около 10^{-7} Па. Измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву. Выполнив тончайшие опыты, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела.

Если в системе тел действуют только внутренние силы, т. е. система *изолирована*, то полный импульс системы остается постоянным.

Отсюда следует, что если какое-либо первоначально покоившееся тело испускает в определенном направлении электромагнитные волны, то это тело получает импульс, направленный в сторону, противоположную излучению и равный импульсу, унесенному излучением. Импульс (количество движения) какого-либо тела есть произведение массы этого тела на его скорость. Или, иначе, масса тела равна его импульсу, деленному на скорость. Так как электромагнитное поле имеет импульс (т. е. оказывает давление на тела) и распространяется с конечной скоростью, то можно сделать вывод, что поле обладает также определенной массой.

Пусть ρ есть масса единицы объема, т. е. плотность электромагнитного поля. Тогда импульс единицы объема поля есть $K = \rho c$. С другой стороны, согласно формуле (20-10) модуль плотности импульса равен P/c^2 . Следовательно,

$$\rho c = \frac{P}{c^2}.$$

С учетом формулы (20-5) получим соотношение:

$$u = \rho c^2,$$

которое выражает плотность электромагнитного поля через объемную плотность энергии u . Это соотношение между массой и энергией справедливо, очевидно, не только для единицы объема, но и для произвольного объема поля. Если m – масса поля, а W – его энергия, то

$$W = mc^2, \quad (20-11)$$

где c – скорость света в вакууме. Так как скорость света очень велика, то даже огромной энергии поля соответствует очень малая масса. Вычислим, например, массу, соответствующую энергии, излученной мощной радиостанцией мощностью $500 \text{ кВт} = 5 \cdot 10^5 \text{ Вт}$ в течение 1 часа. Численные оценки согласно (20-11) дают $m = (5 \cdot 10^5 \times 3600) / (3 \cdot 10^8)^2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 20 \text{ мкг}$. Вследствие весьма большой величины c даже очень большие изменения энергии сопровождаются лишь ничтожными изменениями массы. Однако существуют и такие явления, в которых изменением массы пренебрегать нельзя. Наиболее важными из них являются различные процессы расщепления и пре-

вращения атомных ядер, в которых выделяются огромные энергии, и поэтому соответствующие изменения массы частиц, участвующих в этих процессах, оказываются очень заметными и доступными для очень точных измерений. Это позволило проверить соотношение между массой и энергией на большом числе различных ядерных реакций и убедиться, что оно действительно очень хорошо подтверждается на опыте.

Соотношение (20-11) получено для электромагнитного поля. Однако, согласно специальной теории относительности Эйнштейна, оно имеет совершенно общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения и состояния. Оно выражает то обстоятельство, что всякое изменение энергии любого тела или системы тел всегда связано с изменением массы $\Delta m = \Delta W/c^2$ *независимо от того, какие именно превращения энергии происходят в данном теле или системе тел*. Поэтому полученные результаты можно рассматривать как частный случай применения общего соотношения к электромагнитному полю.

ЛЕКЦИЯ 21

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

21-1. Основные свойства электромагнитных волн. Опыты Герца и Лебедева.

21-2. Излучение диполя. Диаграмма направленности излучения.

21-3. Эффект Доплера для электромагнитных волн.

21-4. Шкала электромагнитных волн.

21-1. Основные свойства электромагнитных волн. Опыты Герца и Лебедева

Свойства электромагнитных волн, предсказанные теорией Максвелла, были экспериментально проверены и подтверждены в опытах Герца, а затем и других ученых. Герцем была создана установка для получения и исследования электромагнитных волн. В своих опытах Герц показал, что электромагнитные волны являются *поперечными*, им свойственно такое состояние как *поляризация*. Оказалось, что электромагнитные волны, подобно свету, отражаются от поверхности раздела двух диэлектриков и преломляются при переходе через эту поверхность.

Рассмотрим физические принципы, используя которые Герцем был создан излучатель электромагнитных волн.

Для образования электромагнитных волн необходимо создать в пространстве достаточно быстро изменяющееся электрическое поле (ток смещения) или соответственно быстро изменяющееся магнитное поле. Электрические колебательные контуры с сосредоточенными емкостью и индуктивностью для этой цели непригодны. В таких контурах все электрическое поле сосредоточено в узком зазоре конденсатора, а все магнитное поле – внутри индуктивности, а в окружающем пространстве электрическое поле практически равно нулю. Колебательный контур с сосредоточенными емкостью и индуктивностью – это квазистационарная, или *сосредоточенная* цепь. Если колебательный контур представить в виде короткозамкнутой *длинной* двухпроводной линии, то электрическое и магнитное поля выходят далеко за пределы такого контура. Поэтому такой контур будет излучать электромагнитные волны. Для создания электромагнитных волн Герцем использовался контур такого вида, который был назван открытым вибратором или электрическим диполем. Этот излучатель, который

получается раздвижением свободных концов двухпроводной линии короткозамкнутой на одном из концов. В пределе получается отрезок прямой проволоки, или *открытый вибратор* (рис. 21-1).

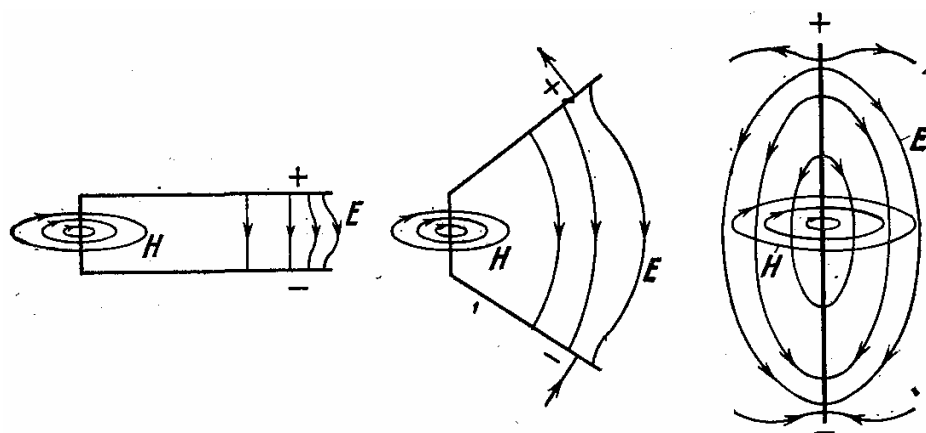


Рис. 21-1

Для изучения электромагнитных волн Герц использовал собственные электрические колебания открытого вибратора, который состоял из двух одинаковых металлических стержней BB (рис. 21-2), разделенных искровым промежутком. Обе половины вибратора заряжались от источника высокого напряжения (резонансного трансформатора Тесла). Когда разность потенциалов достигала пробойного значения, в разряднике проскакивала искра, замыкавшая обе полови-

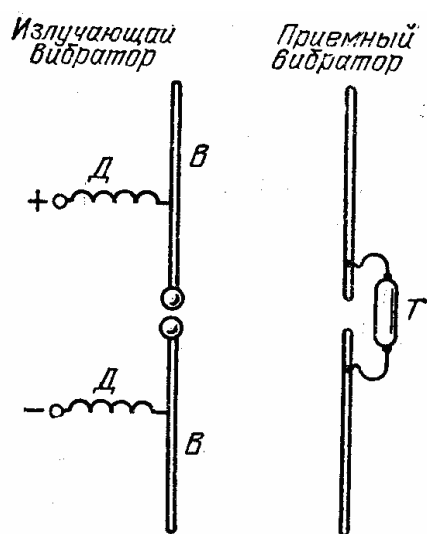


Рис. 21-2

ны вибратора, и в нем возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Чтобы токи высокой частоты не уходили из вибратора в источник напряжения, между вибратором и источником были включены дроссели D .

Под действием переменного электрического поля проходящей электромагнитной волны электроны внутри вибратора начинают совершать вынужденные колебания, отчего в вибраторе появляется быстропеременный ток, а между обеими половинами вибратора — переменное напряжение. Если длина приемного вибратора равна длине излучающего, то соб-

ственные частоты обоих диполей совпадают, и электрические колебания в приемном диполе усиливаются вследствие резонанса. Появление пе-

ременного напряжения обнаруживалось по возникновению искры, или по свечению газоразрядной трубки, подключенной к ветвям диполя. Частота колебаний электромагнитных волн в опытах Герца составляла несколько сотен мегагерц (длина волны ~ 1 м).

Если разместить приемный вибратор (диполь) вблизи излучающего диполя, то можно обнаружить, что искра наиболее интенсивно излучает когда оба диполя параллельны. Если же приемный диполь ориентирован перпендикулярно к излучающему, то искра вообще не возникает. Так как электрические колебания в приемном диполе могут появиться только в том случае, если электрическое поле электромагнитной волны имеет составляющую вдоль диполя, то такой опыт показывает, что электрическое поле в электромагнитной волне параллельно оси диполя. Это справедливо для всех точек плоскости, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину. Волны (механические и электрические), в которых колебания происходят параллельно какому-либо определенному направлению, называют *линейно поляризованными*. Таким образом, в опытах с электрическим диполем устанавливается *поляризация* электромагнитных волн.

Встречая на своем пути достаточно большие (по сравнению с длиной волны) проводящие поверхности, электромагнитные волны отражаются от них. Пользуясь этим, можно получить направленные электромагнитные волны, подобные параллельному пучку света. Это можно сделать, например, помещая небольшой излучающий диполь в фокус металлического параболического зеркала.

Встречая границу двух различных диэлектриков, электромагнитные волны, подобно свету, преломляются. Закон преломления электромагнитных волн имеет такой же вид, как и для света. Если волна, распространяющаяся в вакууме (практически – в воздухе), встречает поверхность диэлектрика под углом падения i , то $\sin i / \sin r = n$, где r – угол преломления, n – показатель преломления диэлектрика, не зависящий от углов i и r . При этом направления падающей и преломленной волн и направление нормали к границе лежат в одной плоскости.

Если направить электромагнитную волну из параболического рефлектора нормально на металлический лист, то между листом и рефлектором появятся падающая и отраженная волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Эти волны, складываясь, образуют стоячую волну с равноотстоящими друг от друга пучностями и узлами. Для обнаружения пучностей и узлов электрического

поля может служить диполь, расположенный параллельно излучающему диполю и имеющий ту же длину, что и последний. Перемещая детектор (например, диполь с включенным между его ветвями гальванометром и диодом, или с газоразрядной трубкой) вдоль нормали к зеркалу, можно обнаружить пучности и узлы электрического поля). Оказывается, что у поверхности металлического листа находится узел электрического поля. Измеряя расстояние между соседними узлами или пучностями, можно определить длину волны, а отсюда, зная частоту колебаний генератора, найти и скорость распространения свободных электромагнитных волн.

Дальнейшие опыты показали, что электромагнитные волны обладают и другими свойствами света. Особое место среди этих исследований занимают опыты П. Н. Лебедева по распространению электромагнитных волн в анизотропных кристаллах (сера), диэлектрическая проницаемость которых зависит от направления электрического поля. Так как большие кристаллы получить трудно, а размеры кристаллов должны быть велики по сравнению с длиной волны, то Лебедев разработал способ получения очень коротких электромагнитных волн с длиной всего около 6 мм, которые излучались миниатюрным искровым вибратором. В этих опытах Лебедев получил двойное преломление электромагнитных волн и воспроизвел все основные явления, наблюдаемые при прохождении света сквозь кристаллы.

Таким образом, было получено опытное доказательство того, что свет и волны, излучаемые электромагнитными источниками (переменными токами), обладают одинаковыми свойствами. Отличие света, видимого глазом человека, от электромагнитных волн, получаемых с помощью различных электрических колебательных систем, состоит лишь в том, что видимые электромагнитные волны имеют значительно меньшую длину волны (0,4–0,8 микрон).

21-1. Излучение диполя. Диаграмма направленности излучения.

Выше отмечалось, что электромагнитные волны возбуждаются изменяющимися во времени электрическими токами. Показано, что электромагнитные волны также могут излучаться и *отдельными движущимися электрическими зарядами, ускорения которых отличны от нуля*. Процесс возбуждения электромагнитных волн электрической системой называется *излучением электромагнитных волн*, а сама система – *излучающей системой*. Электромагнитное поле волны называется *полем излучения*.

В качестве примера простейшей излучающей системы рассмотрим *линейный гармонический осциллятор* – электрический диполь, модуль момента p_e которого изменяется во времени по гармоническому закону

$$p_e = p_0 \sin \omega t, \quad (21-1)$$

где p_0 – амплитуда вектора p_e .

Вектор электрического момента диполя равен $\vec{p}_e = q\vec{l}$, где \vec{l} – вектор, соединяющий отрицательный и положительный заряды диполя (плечо диполя), q – абсолютное значение этих зарядов. Поэтому изменение \vec{p}_e во времени может быть обусловлено тем, что либо q , либо \vec{l} являются функцией времени.

Можно показать, что мгновенная мощность излучения диполя выражается формулой

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \frac{d^2 \vec{p}_e}{dt^2} \right|^2. \quad (21-2)$$

В соответствии с формулой (21-1)

$$\frac{d^2 \vec{p}_e}{dt^2} = -\omega^2 \vec{p}_e = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin^2 \omega t.$$

Поэтому

$$N = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0^2}{6\pi c} \sin^2 \omega t. \quad (21-3)$$

За промежуток времени, равный периоду T колебания, средняя мощность излучения диполя получается интегрированием (21-3):

$$\hat{N} = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mu_0 \omega^2 p_0^2}{6\pi c} \sin^2 \omega t dt = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}. \quad (21-4)$$

Излучение энергии диполем не одинаково в различных направлениях. Интенсивность излучения вдали от диполя, на расстояниях r , которые во много раз больше размера диполя и длины излучаемых им волн (в так называемой волновой зоне):

$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2},$$

где θ – угол между осью диполя и рассматриваемым направлением излучения. Зависимость I от θ при фиксированном значении r , изображена в полярных координатах (I, θ) на рис. 21-1. Эту кривую называют *полярной диаграммой направленности излучения диполя*.

Из этой диаграммы видно, что максимальная интенсивность излучения диполя приходится на направления $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, т. е. в плоскости, проходящей через середину диполя перпендикулярно его оси. Вдоль своей оси ($\theta = 0, \pi$) диполь не излучает совсем.

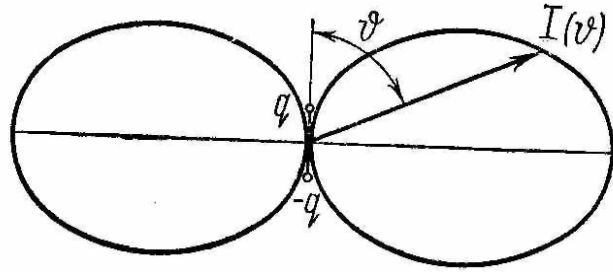


Рис. 21-1

Как видно из формулы (21-4), мощность излучения диполя пропорциональна четвертой степени частоты. По этой причине с ростом частоты резко возрастают безвозвратные потери энергии на излучение в *длинных линиях* переменного электрического тока, например в линиях электропередач. Указанную зависимость мощности излучения от частоты приходится учитывать при выборе частоты напряжения в передающей электросети.

Рассмотренные выше результаты были использованы в приближенной классической теории излучения атомов, согласно которой это излучение обусловлено колебаниями электронов около их положений равновесия в атомах. Результатом этой теории явилось предсказание *среднего времени излучения атома*, которое согласно оценкам составило порядка 10^{-8} с.

21-3. Эффект Доплера для электромагнитных волн

Для световых волн как и для звуковых, также существует эффект Доплера. Однако особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн, не существует. Поэтому доплеровское смещение частоты световых волн определяется только относительной скоростью источника и приемника.

Для световых волн существуют *продольный* и *поперечный* эффекты Доплера. Продольный эффект заключается в уменьшении частоты световой волны в направлении движения волнового фронта (рис. 21-2). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источ-

ником по направлению к приемнику, в системах K и K' имеет вид

$$E(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right], \quad E(x', t') = E'_0 \cos \left[\omega' \left(t' - \frac{x'}{v} \right) + \alpha' \right]. \quad (21-5)$$

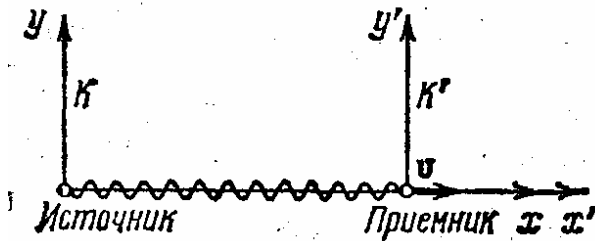


Рис. 21-2

Здесь ω и ω' — частоты волн, фиксируемых в системах отсчета, связанных с источником и приемником, соответственно. Предполагается, что световая волна распространяется в вакууме; поэтому фазовая скорость равна c . Уравнение вол-

ны в системе K' можно получить из уравнения в системе K , перейдя в (21-6) к координате x' и времени t' с помощью преобразований Лоренца. В результате получим, что приемник регистрирует частоту ω' :

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (21-6)$$

Скорость v приемника по отношению к источнику есть величина алгебраическая. При удалении приемника $v > 0$ и частота уменьшается, при приближении приемника к источнику $v < 0$ и частота возрастает. Из этой формулы можно найти относительное изменение частоты при $v \ll c$:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{v}{c}.$$

Поперечный эффект заключается в уменьшении воспринимаемой приемником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно к прямой, проходящей через приемник и источник (когда, например, источник движется по окружности, в центре которой помещается приемник). Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера пропорционально *квадрату отношения* v/c и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте, для которого относительное изменение частоты *пропорционально первой степени* v/c .

Продольный эффект Доплера используется для определения скорости звезд. Измерив относительное смещение линий в спектрах звезд, можно по формуле (21-6) определить их скорость v .

Тепловое движение молекул светящегося газа приводит вследствие эффекта Доплера к уширению спектральных линий. Из-за хаотичности теплового движения все направления скоростей молекул относительно спектрографа равновероятны. Поэтому в регистрируемом прибором излучении присутствуют все частоты, заключенные в интервале от $\omega(1 - v/c)$ до $\omega(1 + v/c)$, где ω – частота, излучаемая молекулами, v – скорость теплового движения. Таким образом, по ширине регистрируемой спектральной линии (ее называют доплеровской шириной) можно судить о скорости теплового движения молекул, а следовательно, и о температуре светящегося газа.

21-4. Шкала электромагнитных волн

Отличие света, видимого глазом человека, от электромагнитных волн, получаемых с помощью различных систем, состоит лишь в том, что у видимых электромагнитных волн имеют значительно меньшую длину волны (от 400 до 750 мкм). Атомы и молекулы излучают также и невидимые глазом электромагнитные волны. Электромагнитные волны с длиной волны $\lambda > 7,5 \cdot 10^{-6}$ м (750 мкм), заполняющие промежуток между ультракороткими радиоволнами с $\lambda = 1-2$ мм и видимым светом, называют *инфракрасным излучением*. Электромагнитные волны, длины которых заключены в пределах от 400 до 1000 мкм, называют *ультрафиолетовым излучением*. В 1895 г. В. Рентген обнаружил еще более коротковолновое электромагнитное излучение – *рентгеновское*. Вскоре после открытия в 1896 г. явления естественной радиоактивности было установлено, что в процессе радиоактивного распада часто возникает γ -излучение – электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda < 10^{-10}$ м.

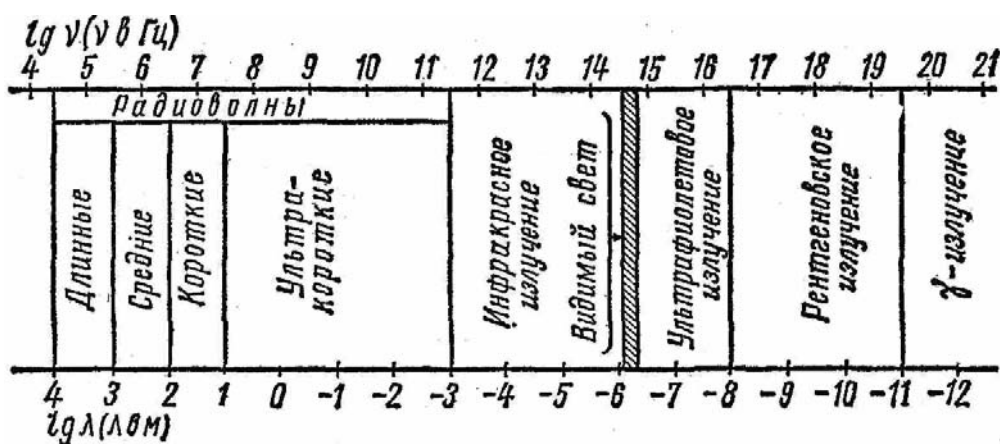


Рис. 21-2

Границы по частоте ν (или длине волны в вакууме $\lambda = c/\nu$) между различными видами электромагнитного излучения, которые выбраны при построении так называемой *шкалы электромагнитных волн*, изображенной на рис. 21-2, весьма условны. В действительности нет никаких резких переходов от одного вида излучения к другому. Однако, электромагнитные излучения, частоты которых отличаются на много порядков (например, радиоволны и лучи Рентгена), обладают качественно различными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич, И. И. Физика / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004.
2. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для ВТУЗов / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высш. шк., 1989, 2000.
3. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие. / Т. И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1998.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – 3 т.
5. Калашников С.Г. Электричество: учеб. пособие. / С.Г.Калашников. – 5-е изд. испр. и доп. – М.: Наука, 1985. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. Электрическое поле и его свойства	3
ЛЕКЦИЯ 2. Электрическое поле и его свойства (продолжение)	13
ЛЕКЦИЯ 3. Теорема Гаусса для напряженности электростатического поля	20
ЛЕКЦИЯ 4. Вещество в электрическом поле. Диэлектрики	29
ЛЕКЦИЯ 5. Вещество в электрическом поле. Векторы поляризации и электрического смещения	39
ЛЕКЦИЯ 6. Энергия электрического поля. Емкость	46
ЛЕКЦИЯ 7. Постоянный электрический ток	56
ЛЕКЦИЯ 8. Электрический ток в металлах	67
ЛЕКЦИЯ 9. Основные законы магнитного поля	74
ЛЕКЦИЯ 10. Действие магнитного поля на проводник с током	83
ЛЕКЦИЯ 11. Действие магнитного поля на движущийся заряд	95
ЛЕКЦИЯ 12. Вещество в магнитном поле. Диамагнетики	104
ЛЕКЦИЯ 13. Парамагнетики и ферромагнетики	115
ЛЕКЦИЯ 14. Магнитные цепи	125
ЛЕКЦИЯ 15. Явление электромагнитной индукции	135
ЛЕКЦИЯ 16. Явление взаимной индукции. Энергия магнитного поля	145
ЛЕКЦИЯ 17. Колебательные процессы в электрических цепях	154
ЛЕКЦИЯ 18. Уравнения Максвелла электромагнитного поля	167
ЛЕКЦИЯ 19. Электромагнитное поле и электромагнитные волны	175
ЛЕКЦИЯ 20. Энергия и импульс электромагнитных волн	184
ЛЕКЦИЯ 21. Излучение электромагнитных волн	192
ЛИТЕРАТУРА	193